

L'écharpe d'Iris

par Jean-Pierre DEVALANCE
Cité scolaire Saint Exupéry
40160 Parentis en Born

Iris : Pour les Grecs, c'est une déesse. Épouse du vent d'Ouest Zéphir, elle porte les messages des dieux et relie la Terre et le Ciel.

*C'est aussi le nom grec de l'**arc-en-ciel**.*

INTRODUCTION

Dans le chapitre Optique, le paragraphe 2 du programme officiel des Sciences Physiques en 4ème prévoit «Couleurs de l'arc-en-ciel». S'il s'agit de stimuler les facultés d'observation (heures de visibilité ; positions relatives du soleil, du nuage, de l'observateur ; position du rouge dans l'arc ; existence d'un arc du second ordre...), il ne sera pas toujours facile de répondre aux élèves. S'il est assez facile de présenter expérimentalement des irisations, il n'y a pas d'étude du phénomène dans les ouvrages courants. Il y a bien longtemps que je n'ai pas vu de publication à ce sujet, aussi je propose ici quelques éléments de réflexion. L'objectif : que le contenu soit accessible à tous, (ceci se fera au détriment de considérations théoriques plus pointues) et qu'il puisse donner une idée assez précise du sujet afin que l'on puisse répondre à nos élèves de 4ème !). L'auteur de ce développement n'est pas spécialiste de l'optique, mais tout simplement un enseignant qui a en charge des élèves de 4ème.

1. UN RAYON DANS UNE GOUTTE

1.1. Présentation

Voir figure 1. Nous considérons ici un rayon incident S (venu du soleil). Dans un premier temps, on le considèrera monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ (radiation D du sodium à 20°C). Dans

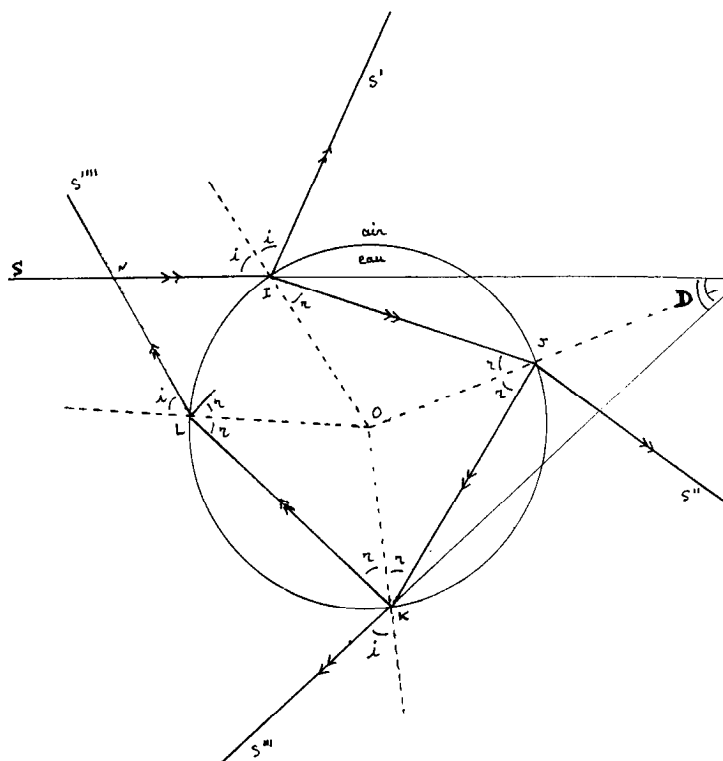


Figure 1

ces conditions l'indice de réfraction de l'eau vaut $n = 1,33303$ (on choisira $n = 4/3$ dans les calculs).

Arrivé en I à la surface de la goutte (supposée sphérique), le rayon S subit une réflexion (IS') et une première réfraction. Le rayon réfracté subit à son tour une réflexion (JK) et une réfraction (JS''). Arrivé en K, on peut observer un rayon émergent (KS''') : c'est celui que nous étudierons. On peut aussi envisager la réflexion KL puis LS'''' etc...

1.2. Réflexion, réfraction :

A la réflexion $\boxed{r = r'}$ le rayon subit une déviation $\boxed{d_1 = \pi - 2r}$.

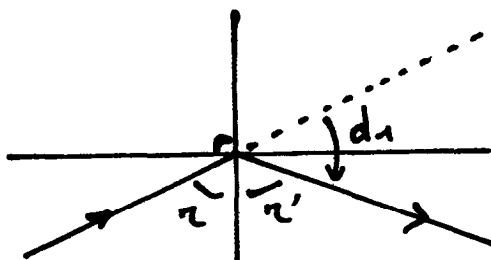


Figure 2a

A la réfraction $\sin i = n \sin r$ et le rayon subit une déviation d_2 :
 $d_2 = i - r$ (en conservant les notations de la figure 1).

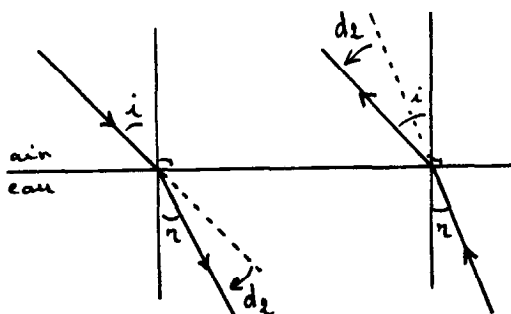


Figure 2b

1.3. Application à la goutte :

Pour émerger, S''' a subi 2 réfractions et une réflexion qui ont entraîné des déviations toutes dans le même sens, d'où une déviation totale D_1 :

$$D_1 = 2(i - r) + (\pi - 2r)$$

$$= \pi - 2(2r - i)$$

Ainsi S''' arrive à notre œil en faisant un angle D par rapport à la direction du soleil :

$$D = 2(2r - i)$$

$$\text{où } D = 4 \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) - 2i$$

La goutte chutant, le point I bouge (pour un rayon donné). Alors l'angle d'incidence i varie ou ce qui revient au même, un faisceau éclairant une goutte, on a un infinié d'angles d'incidence.

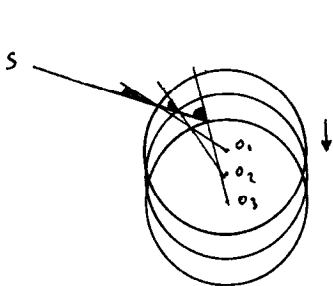


Figure 3a

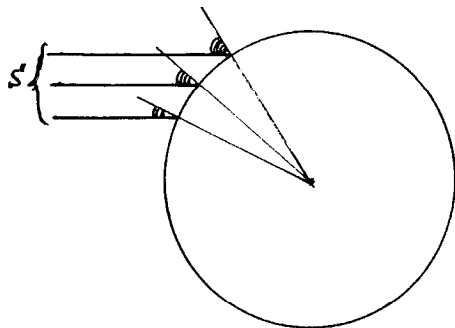


Figure 3b

1.4. Étude de $D = f(i)$

$D = 2 (2r - i)$. Dérivons :

$$dD = 2 (2dr - di)$$

$$\text{or } d(\sin i) = n d(\sin r)$$

$$\text{soit } \cos i \, di = n \cos r \, dr \text{ d'où } dr = \frac{\cos i}{n \cos r} \, di$$

$$\text{ainsi } dD = 2 \left(\frac{2 \cos i}{n \cos r} - 1 \right) di$$

La dérivée $\frac{dD}{di}$ s'annule pour $2 \cos i = n \cos r$.

$$\text{Soit } 4 \cos^2 i = n^2 \cos^2 r = n^2 (1 - \sin^2 r)$$

$$4 (1 - \sin^2 i) = n^2 - n^2 \sin^2 r = n^2 - \sin^2 i$$

$$4 - n^2 = 3 \sin^2 i$$

$$\text{si } \boxed{\sin i = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}} \text{ alors } \frac{dD}{di} = 0$$

Pour l'eau $n = \frac{4}{3}$ on trouve $i = 59,39^\circ$.

Pour le diamant $n = 2,42$. Il n'y a pas de valeur de i calculable. Nous n'observerions pas de rayon (de toute façon, il pleut rarement des diamants !)

Si $n < 2$, il y a toujours une valeur de i qui annule la dérivée. D admet toujours un extremum. Montrons qu'il s'agit d'un maximum.

Si $i = 0$ alors $\sin i = 0$ d'où $r = 0$ et $D = 0$

puis

$$\left(\frac{dD}{di}\right)_0 = 2\left(\frac{2}{n} - 1\right)$$

et comme $n < 2$ $\left(\frac{D}{di}\right)_0 > 0$

Si $i = 90^\circ$ alors $\sin i = 1$ et $\sin r = \frac{1}{n}$ d'où $r_2 = \arcsin \frac{1}{n}$
($n = \frac{4}{3}$ donne $r_1 = 48,6^\circ$)

$\cos i = 0$ et $\left(\frac{dD}{di}\right)_{90} = 2(-1) < 0$

Ainsi

i	0	59,39°	90°
r	0	40,2°	48,6°
$\frac{dD}{di}$	+ -		
D	0	42°02'	14°21'

Courbe d'équation $y = f(x) = 2 * ((2 * \text{ARCSIN}((3 * \text{SIN}(X))/4)) - X)$

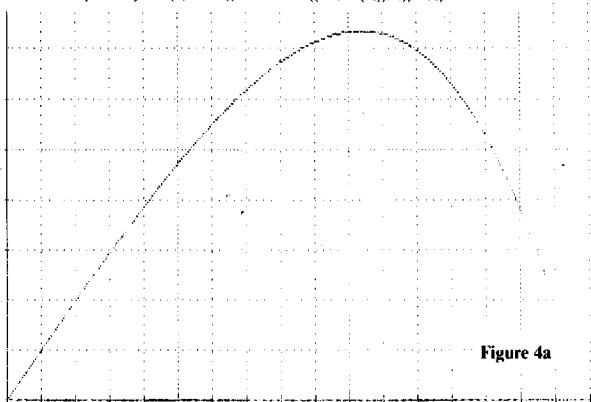


Figure 4a

(Échelles - Abscisses - 0,1 Ordonnées - 0,1)

$$D = 2 \left[2 \arcsin \frac{\sin i}{4/3} - i \right] \text{ avec un traceur de courbe}$$

D en degrés

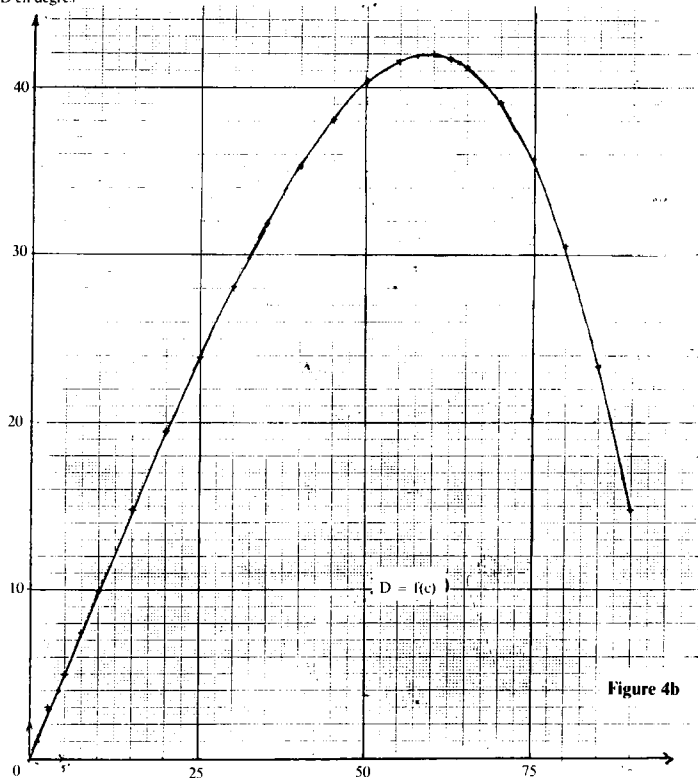


Figure 4b

On peut construire la courbe $D = f(i)$

	i	10	20	30	40	50	60	70	80	90
en degrés	r	7,5	14,9	22	28,8	35,1	40,5	44,8	47,6	48,6
	D	9,9	19,5	28,1	35,3	40,3	42	39,2	30,5	14,4

Remarque : si i est petit, $\sin i \approx i$ d'où $r \sim \frac{i}{n}$

$$D = 4r - 2i \sim i \left(\frac{4}{n} - 2 \right) \quad \text{et } n = \frac{4}{3}, D \sim i$$

Remarque : le matériel Thomson en place dans nos établissements manque cruellement de fonctions trigonométriques inverses (ou alors je n'ai pas su trouver arcsin, arcos, arctan...) mais une calculatrice programmable permet de tracer la courbe point par point.

Exemple sur TI : LRN, STOØ, sin, *, 3, :, 4, =, invsin, pause, *, 2, -, RCL Ø, =, *, 2, =, R/S, RST, LRN, RST.

On introduit la valeur de i puis R/S et on observe la valeur de r puis D.

1.5. Du point de vue de la physique :

Quelle est la signification de ce maximum de déviation ? Toute fonction continue varie très lentement au voisinage d'un extremum. Donc on a pratiquement la même déviation pour des valeurs de i qui varient assez largement autour de la valeur $i = 59,39^\circ$, et il y a «accumulation» de rayons émergents au voisinage de la valeur $D = 42^\circ$. Si nous raisonnons maintenant dans l'espace et non plus dans le plan, nous faisons apparaître qu'un faisceau S produit des rayons émergents contenus dans un cône dont le sommet est occupé par la goutte et dont le demi-angle au sommet vaut 42° .

Il y a accumulation de rayons sur les bords de ce cône. On nomme parfois les génératrices de ce cône «rayons efficaces», et ainsi les bords du cône sont nettement plus lumineux que l'intérieur.

En revenant à la figure 5, il faut noter que la direction d'observation Ax «culmine» dans le plan vertical lorsqu'elle fait avec l'horizontale un angle D-h (h étant la hauteur du soleil). Or $D = 42^\circ$. h ne doit donc pas dépasser cette valeur 42° . Or en été la hauteur du soleil peut valoir jusqu'à $113^\circ 27' - L$ (L = latitude du lieu) au 21 juin, ce qui veut dire qu'on ne peut pas observer d'arc-en-ciel pendant une bonne partie de la journée. Nous ne mentionnons pas de calculs ici pour éviter les jalousies locales mais signalons que les Parisiens pour la fête de la Saint Jean, en cas de pluie, devraient attendre 17 heures pour voir l'Écharpe d'Iris à moins de l'avoir observée avant 11 heures. En revanche leur situation par $48^\circ N$ leur laisse la possibilité de faire l'observation toute la journée entre le solstice d'hiver et le solstice d'été. Ajoutons que plus h est faible (soleil bas sur l'horizon) plus D-h est grand alors l'arc est plus vaste.

Résumons ces premières étapes :

On observe un arc lumineux dans le ciel lorsque :

- Le soleil n'est pas trop haut sur l'horizon.
- On a le soleil dans le dos.
- On a devant soi une zone atmosphérique remplie de gouttes d'eau.

Remarque : l'arc est un phénomène lié à l'observateur (s'il bouge, l'arc aussi) ; il s'agit d'une image.

2. L'ARC ET LES COULEURS

Jusqu'alors nous avons raisonné sur une longueur d'onde donnée. La formule de Cauchy

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

donne une bonne approximation de la variation de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde λ de la radiation lumineuse.

Reprenons les formules pour un angle d'incidence i donné :

si λ croît, comme $n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}$, alors n décroît.

Et comme $\sin r = \frac{\sin i}{n}$, alors r croît.

Ensuite $D = 2(2r - i)$, donc D croît.

Ainsi D est une fonction croissante de la longueur d'onde.

En conséquence : $D_{\text{rouge}} > D_{\text{violet}}$.

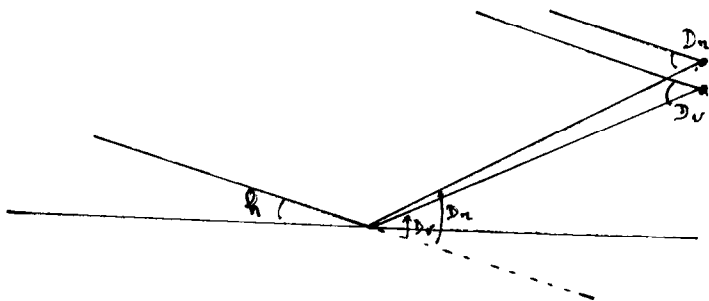


Figure 7

Avec une source ponctuelle :

	Rouge	Jaune	Vert	Violet
λ nm	671	589	535	397
n	1,33085	1,33303	1,33493	1,34340
i degrés	59,54°	59,40	59,30	58,81
r degrés	40,37	40,22	40,10	39,55
D degrés	42,39	42,07	41,80	40,59

L'arc-en-ciel s'étale alors sur 2° d'angle.

Pour la loi de Cauchy $n^2 = A + B/\lambda^2$. On vérifiera qu'on obtient de bons résultats avec $A = 1,7535$ et $B = 8,094 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ pour les valeurs proposées.

Une «étude statistique» de $n^2 = f(1/\lambda^2)$ fait apparaître un coefficient de corrélation de 0,99984 (proche de 1). Une droite traduit bien $n^2 = f(1/\lambda^2)$.

L'observateur verra une succession d'arcs lumineux concentriques :

- Violet au centre
- Rouge à l'extérieur.

Une même série de gouttes en tombant donnera le spectacle d'arcs rouge, orangé... violet mais la scène semble fixe.

D'autre part le soleil n'est pas une source ponctuelle (loin s'en faut : un disque de 1392000 kilomètres de diamètre même observé de 150 000 000 kilomètres, «ça s'étale» !! - Diamètre apparent 0,5317° soit 32'). Alors les arcs lumineux observés ont une largeur non négligeable et vont se chevaucher. Ainsi l'observateur ne voit pas des couleurs «pures» d'où cette impression de lavis, de fondu enchaîné, dans l'évolution du rouge au violet, et d'autre part c'est un spectacle de jour qui manque, de ce fait, de contraste, même si pour des raisons que nous évoquerons tout à l'heure, le ciel paraît assombri à proximité de l'arc.

3. LES AUTRES RAYONS

Revoir la figure 1

I S' : on a $D = 2i$: pas d'effet spécial.

J S'' : on a $D = 2(i-r)$

$$\text{d'où } dD = 2 di - 2 dr = 2 \left(1 - \frac{\cos i}{n \cos^2 r} \right) di$$

$\frac{dD}{di}$ s'annule pour $n \cos r = \cos i$ qui amène à $n^2 = 1$ donc D ne présente pas d'extremum : pas de particularité.

L S'''' : $D_t = 2(i-r) + 2(M-2r)$ (2 réflexions et 2 réfractions).

$$D_t = 2i - 6r$$

$$\text{D'où l'angle } D' = 180 - 2(3r - i)$$

On montre alors que :

$$\frac{dD'}{di} = 2 \left(1 - \frac{3 \cos i}{n \cos^2 r} \right)$$

qui conduit à i_m :

$$\sin i_m = \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}$$

$$i_m = 71,83^\circ \quad r = 45,45^\circ \quad D' = 50,98^\circ$$

i	0	71,83°	90°
r	0	45,45°	48,6°
$\frac{dD'}{di}$	-	0	+
D'	180	50,98°	68,46°

Alors pour des incidences situées sur l'hémisphère inférieur de la goutte, l'émergence se fait vers le sol (comme pour S'''). Ainsi on observera un deuxième arc-en-ciel sous un angle de 51° environ.

Nous avons vu que pour i donné r croît lorsque λ croît et ici :

$$D' = 180^\circ + 2i - 6r \text{ décroît}$$

D' est une fonction décroissante de λ , $D'_{\text{rouge}} < D'_{\text{violet}}$.

L'arc secondaire a donc le rouge vers le centre et le violet à l'extérieur.

Cet arc est bien moins lumineux que le précédent et il est inutile d'envisager d'autres réflexions et d'autres réfractions, car les phénomènes deviennent vite imperceptibles.

A noter que la formation de ces deux arcs lumineux a été gourmande en lumière et la région située entre les deux arcs se trouve appauvrie en rayons lumineux et paraîtra plus sombre que le reste du ciel.

Notre étude a été faite à partir de gouttes sphériques, ce qui est loin d'être une réalité quotidienne : les gouttes sont plus ou moins grosses et

dans leur chute il faut envisager des déformations notables. Ceci nous amène à conclure qu'une étude précise de l'arc-en-ciel nous conduirait à faire intervenir des facteurs multiples pas très simples à maîtriser. Nous pensons toutefois que notre étude simpliste se rapproche assez bien de la réalité et qu'en ayant ce modèle en tête, on peut faire sentir aux élèves la complexité du phénomène en insistant sur quelques points que nous rappelons :

Quand on observe un arc-en-ciel,

- le soleil ne brille pas trop haut dans le ciel dans notre dos.
- Il y a face à nous une nappe de gouttes d'eau (pluie, nuage, jet d'eau, arrosage...).
- Il s'agit toujours d'arcs de cercle avec couleurs délavées (le violet à l'intérieur, le rouge à l'extérieur).
- Il peut y avoir un arc secondaire moins lumineux avec ordre des couleurs inverse.
- C'est un phénomène de lumière : la lumière solaire subit des «transformations» par les gouttes d'eau.

Les gouttes ne sont pas colorées.

Attention ! Ceci ne prétend pas être une théorie de l'arc-en-ciel. Il s'agit d'un développement destiné à aider quelques collègues dans l'approche du phénomène et à susciter une étude plus approfondie.

Quant à moi, je sollicite les opticiens qualifiés pour me faire parvenir des références ou des études précises qui permettront d'affiner ma connaissance voire de corriger des erreurs.

Nous ne pouvons pas terminer sans citer Descartes qui publia une théorie de l'arc-en-ciel. Dans un Discours publié en 1637, il développe les lois de la réflexion et de la réfraction en utilisant des raisonnements qui lui attirèrent pas mal de sarcasmes mais sa théorie, aux dires des spécialistes d'aujourd'hui doit être reconnue comme vraie.

N.B. : on me signale qu'il y a eu dans le BUP des articles sur ce sujet il y a déjà longtemps et qu'il existe chez Belin un ouvrage intitulé «Les phénomènes naturels » dans lequel la théorie est abordée solidement.