

## Faut-il, en régime quasi stationnaire, «tuer » la différence de potentiel ?

par Robert FLECKINGER, Robert CARLES et José-Philippe PÉREZ  
Université Paul Sabatier, Toulouse III

---

### 1. INTRODUCTION

En électromagnétique classique, il est bien connu que le potentiel électromagnétique ( $\mathbf{A}$ ,  $V$ ) est indéterminé, contrairement au champ électromagnétique ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) qui est lui directement relié aux grandeurs expérimentales accessibles. Ainsi, le changement de jauge défini par :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad} f \quad \text{et} \quad V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$$

$f$  étant une fonction différentiable des variables d'espace et de temps, laisse invariant le champ électromagnétique, lequel est relié à ( $\mathbf{A}$ ,  $V$ ) par les équations :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$$

Dans ce qui suit, nous nous limitons au cas très important de l'approximation des régimes quasi stationnaires pour lequel le terme de différence de potentiel est souvent employé. Dans cette approximation, on adopte les expressions suivantes pour  $\mathbf{A}$  et  $V$  en jauge de Lorentz :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}')$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}')$$

On sépare alors dans  $\mathbf{E}$  la contribution due à  $V(-\mathbf{grad} V)$  de celle due à  $\mathbf{A}$ , appelée champ électromoteur d'induction ou terme de Newmann -  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ , alors qu'en raison de l'indétermination des potentiels, **cette séparation est totalement arbitraire.**

Dans une conférence intitulée «Faut-il tuer le champ électromoteur d'induction ?» [1], H. GIÉ a attiré l'attention sur le caractère ambigu et superflu de ce concept. Nous proposons ici de poursuivre cette analyse en posant de manière analogue la question «Faut-il, en régime quasi-stationnaire, tuer la différence du potentiel ?». Car, au même titre que le champ électromoteur d'induction, la différence de potentiel, en régime variable, est une grandeur indéterminée. Il est facile de s'en convaincre à l'aide d'une expérience simple réalisable avec du matériel disponible dans un lycée.

## 2. UNE EXPÉRIENCE À INTERPRÉTER

La figure 1 schématise le circuit réalisé : un générateur basse fréquence débite dans une bobine de 500 spires, à noyau magnétique fermé, un courant sinusoïdal de fréquence de l'ordre de 800 Hz. Un circuit secondaire, constitué de deux résistances  $R_1$ ,  $R_2$ , d'une centaine d'ohms, enlace le noyau. Le point M est relié à la masse d'un oscilloscope bicourbe, de voies A et B, utilisé en voltmètre. L'autre extrémité N de  $R_1$  est reliée à A et B par deux fils conducteurs distincts, l'un direct et l'autre enlaçant le noyau magnétique. Les résultats obtenus sont clairs : les sinusoïdes représentées sur l'écran ne coïncident pas ; le déphasage de  $\pi$ , constaté dans ce circuit, ne dépend pas de la disposition ou de la longueur des fils conducteurs NA et NB, pourvu que l'un soit direct et que l'autre enlace le circuit magnétique.

Ainsi, l'oscilloscope, et plus largement tout voltmètre, ne permet pas de mesurer une différence de potentiel quasi stationnaire entre deux points d'un circuit, **laquelle par définition ne doit dépendre que de ces deux points.** Afin d'interpréter ce résultat expérimental, il convient au préalable de rappeler le phénomène d'induction électromagnétique en soulignant l'intérêt d'une approche globale en relation directe avec l'expérience [2].

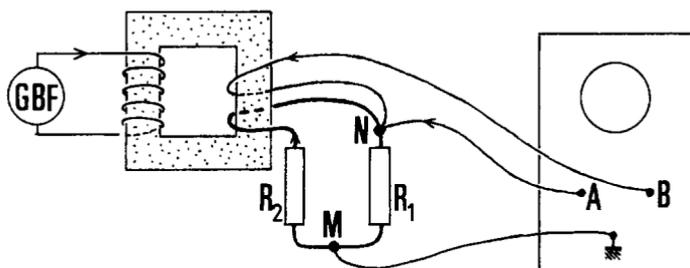


Figure 1

### 3. INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

#### 3.1. Force électromotrice induite

Dans une expérience un peu oubliée [3], M. Faraday a montré que, dans des bobines de même géométrie, réalisées avec des matériaux différents, le courant induit  $i(t)$ , qui apparaît lorsqu'on les soumet à un même champ magnétique variable, est proportionnel à la conductivité des matériaux. Autrement dit, le produit de la résistance  $R$  par le courant induit  $i(t)$  ne dépend que de la géométrie de la bobine et des variations du champ.

Pendant la durée élémentaire  $dt$ , le processus générateur du courant induit fournit à l'ensemble des charges du circuit un travail  $\delta\tau_g$ . La force électromotrice induite (f.é.m.),  $e(t)$ , est alors définie comme le travail rapporté à l'unité de charge électrique traversant une section quelconque du circuit. Notant  $dq$  la quantité  $i(t)dt$ , on a donc :

$$e(t) = \frac{\delta\tau_g}{dq} .$$

Un bilan énergétique peut être obtenu en appliquant le théorème de l'énergie cinétique aux charges. En désignant par  $\delta\tau_f$  le travail des forces autres que celles qui sont à l'origine du courant induit, et en négligeant la variation d'énergie cinétique des charges, il vient :

$$\delta\tau_g + \delta\tau_f = 0 .$$

Dans le cas de l'expérience de Faraday où  $\delta\tau_f$  est uniquement le travail des forces dissipatives, on obtient, d'après la loi de Joule :

$$\delta\tau_f = -Ri^2(t)dt, \text{ d'où } e(t)dq - Ri^2(t)dt = 0 \text{ et } e(t) = Ri(t) .$$

On voit donc que la f.é.m. ne dépend que de la géométrie du circuit et du champ électromagnétique. Ce dernier fournit aux charges, pendant la durée  $dt$ , le travail :

$$\delta\tau_g = dt \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\nu = i(t)dt \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = d_q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

puisque la force magnétique ne travaille pas et que  $\mathbf{J}d\nu = i(t)d\mathbf{l}$ . Il en résulte que :

$$e(t) = -\frac{\delta\tau_g}{\delta q} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l} .$$

Dans cette formule,  $\mathbf{F}$  est la seule force susceptible de mettre en mouvement par rapport au circuit une charge  $q$ . Ainsi, le travail de cette force électromagnétique le long d'un chemin **fermé** n'est pas nul. Cette force n'est donc pas conservative : **elle ne dérive pas d'une énergie potentielle** et en régime variable le champ  $\mathbf{E}$  ne dérive pas d'un potentiel.

### 3.2. Loi de Faraday

#### a) Circuit immobile

Les expériences de Faraday montrent que, dans le cas d'un circuit **fermé** et **immobile** dans le référentiel où l'on évalue le champ, on a :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot n dS$$

Notons que,  $S$  étant une surface quelconque s'appuyant sur le contour du circuit, cette expression n'a de sens que si :

$$\iint_{S'} \mathbf{B} \cdot n dS' = 0$$

à chaque instant,  $S'$  étant une surface fermée quelconque. Cette dernière équation fait donc partie intégrante de la loi de Faraday.

*b) Équation de Maxwell-Faraday*

On déduit de la loi de Faraday et de la relation entre  $e(t)$  et  $\mathbf{E}$  l'équation suivante :

$$e(t) = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

Soulignons que cette dernière équation ne fait pas intervenir directement les propriétés du matériau, conformément aux résultats expérimentaux de Faraday. On peut donc l'extrapoler à un contour fermé **matériel ou non**. En vertu du théorème de Stokes, il en résulte que :

$$\text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

Cette équation associée à  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  apparaît comme une relation de structure du champ électromagnétique ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) indépendante de toute caractéristique matérielle.

*c) Cas d'un circuit mobile*

Ce cas se déduit du précédent. En effet, considérons un circuit en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire  $R$ . La force susceptible de mettre en mouvement, par rapport au circuit, une charge  $q$  du circuit est la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B})$$

dans laquelle  $\mathbf{V}$  désigne la vitesse par rapport à  $R$  du point considéré du circuit. On pose donc :

$$e(t) = \int_C \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

Comme on a, en outre :

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS.$$

$C$  étant le contour, qui coïncide avec le circuit à l'instant considéré et  $S$  une surface qui s'appuie sur ce contour, on obtient :

$$e(t) = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{ndS} + \int_C (\mathbf{V} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

#### 4. QUE MESURE-T-ON AVEC UN VOLTMÈTRE ?

Revenons à l'expérience décrite sur la figure 1. Elle s'interprète aisément si l'on admet que l'indication d'un voltmètre (immobile) branché aux bornes d'un dipôle NM (figure 2) est donnée, **quel que soit le type de voltmètre**, par l'expression :

$$U_{NVM}(t) = \int_{NVM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

$NVM$  précisant, entre les points N et M, la branche du circuit qui traverse le voltmètre. Cette quantité est **la tension mesurée** entre les points M et N à l'aide du voltmètre.

**Remarque :** Pour un voltmètre magnétoélectrique par exemple, on a, avec des notations classiques :

$$U_{NVM}(t) = \int_{NVM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{NVM} \frac{\mathbf{J}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = \int_{NVM} \frac{i_v(t) d\mathbf{l}}{\gamma_S} = R_v i_v(t)$$

$R_v$  et  $i_v(t)$  désignant respectivement la résistance du voltmètre et l'intensité du courant qui le parcourt.

Pour relier  $U_{NVM}$  aux caractéristiques du dipôle D, utilisons la loi de Faraday :

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{NDM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{MVN} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\phi}{dt} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{ndS}$$

soit finalement :

$$U_{NVM}(t) = \int_{NDM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{ndS}$$

Ce résultat met nettement en évidence l'influence du flux de  $\mathbf{B}$  à travers la boucle contenant l'appareil de mesure. L'expérience initiale montre l'importance que pourrait prendre ce terme. Plus précisément, dans le montage considéré,  $U_{NAM}$  et  $U_{NBM}$  s'écrivent :

$$U_{NAM} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{d\phi}{dt} \quad \text{et} \quad U_{NBM} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{d\phi}{dt}$$

ce qui permet d'interpréter le déphasage  $\pi$  entre les deux voies observé à l'oscilloscope. Notons que :

$$U_{NAM} - U_{NBM} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Ainsi, lorsque  $d\phi/dt \neq 0$ , la tension mesurée dépend de la position du voltmètre. Cependant, dans la pratique, les variations de champ magnétique sont souvent localisées à l'intérieur des machines : la position d'un voltmètre n'influe donc pas sur son indication. Dans ces conditions on peut écrire :

$$U_{NAM} = U_{NBM} = U_{NM}$$

**Remarque :** Les précautions qu'il est indispensable de prendre avec les circuits de mesure, dès que l'on opère à fréquence élevée, sont bien connues. En faisant  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$ , on retrouve naturellement le cas des régimes stationnaires où la différence de potentiel garde tout son sens.

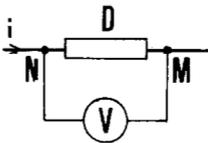


Figure 2

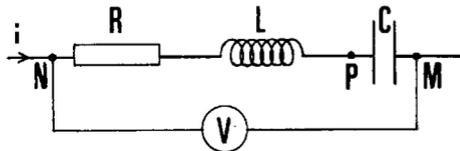


Figure 3

## 5. ÉCRITURE DES LOIS DE KIRCHHOFF

Nous nous proposons de montrer, à l'aide d'exemples simples, que les indications données par les voltmètres obéissent aux lois de Kirchhoff relatives aux tensions, pourvu que quelques précautions d'emploi soient prises.

### 5.1. Tension mesurée aux bornes d'un dipôle RLC

Considérons le dipôle D constitué d'une résistance, d'une inductance et d'une capacité placées en série (figure 3). D'après ce qui précède, on a la relation intégrale suivante :

$$-\frac{d\phi}{dt} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{MVN} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - U_{NVM}$$

où  $\phi$  désigne le flux de  $\mathbf{B}$  à travers le circuit fermé NDMVN. Entre les points N et M, le long du dipôle D, on parcourt une partie conductrice et une partie isolante entre P et M. Il vient donc :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{NP} \frac{\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\gamma} + \int_{PM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ri(t) + \int_{PM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} .$$

Or, en régime quasi stationnaire, la capacité du condensateur peut se mettre sous la forme :

$$C = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS / \int_{PM} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$S$  étant la surface d'une armature du condensateur. En outre, le champ au voisinage de cette surface a pour expression:

$$\mathbf{E} = (\sigma / \epsilon_0) \mathbf{n}$$

ce qui entraîne :

$$\epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = Q.$$

Finalement, en exprimant la charge  $Q$  en fonction de  $i(t)$ , il vient :

$$-\frac{d\phi}{dt} = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt - U_{NVM}$$

d'où, puisque  $\phi = Li$  :

$$U_{NVM} = Ri + \frac{1}{C} \int idt + L \frac{di}{dt}$$

Dans le cas fréquent où le champ magnétique est localisé dans la bobine, l'inductance  $L$  et donc la tension  $U_{NVM}$  ne dépendent pas de la position du voltmètre.

**5.2. Dipôles en parallèle**

Intéressons-nous à l'indication donnée par un voltmètre branché aux bornes communes de deux dipôles  $D_1$  et  $D_2$  en parallèle (figure 4a). On peut, dans ce cas, écrire les deux équations suivantes :

$$\int_{D_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - U_{NVM} = -\frac{d\phi_1}{dt} \quad \text{et} \quad \int_{D_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - U_{NVM} = -\frac{d\phi_2}{dt}$$

où :  $\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$  et  $\phi_2 = M i_1 + L_2 i_2$

$i_1$  et  $i_2$  désignant les courants qui parcourent les dipôles. On obtient donc, en l'absence de condensateur pour simplifier l'écriture :

$$U_{NVM} = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad U_{NVM} = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

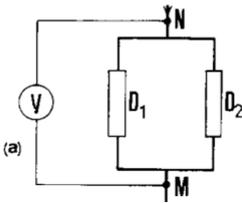
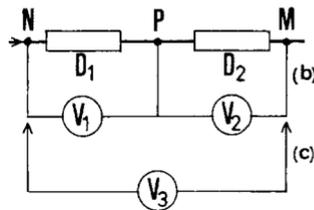


Figure 4a



Figures 4b et 4c

**5.3. Dipôles en série**

Pour des dipôles en série, tels que ceux représentés sur la figure 4b, on a toujours le même type de relation :

$$-\frac{d\phi_1}{dt} = \int_{D_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - U_{NV_1P} \quad \text{et} \quad -\frac{d\phi_2}{dt} = \int_{D_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - U_{PV_2M}$$

Il en résulte que :

$$U_{NV_1P} + U_{PV_2M} = \int_{D_1+D_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt}$$

Cette dernière expression correspond bien à l'indication d'un troisième voltmètre  $V_3$  placé entre N et M sur le même circuit (figure 4c). On a donc bien :

$$U_{NV_1P} + U_{PV_2M} = U_{NV_3M}$$

Si le flux est localisé dans les dipôles  $D_1$  et  $D_2$ , on peut alors écrire :

$$U_{NP} + U_{PM} = U_{NM}.$$

## 6. CONCLUSION

La notion de différence de potentiel, introduite en régime stationnaire à partir de l'énergie, perd son intérêt en régime variable du fait de son indétermination liée au choix de jauge. L'approche globale proposée ici pour l'induction électromagnétique conduit, en régime quasistationnaire, au concept de tension qui est lui indépendant de ce choix.

D'un point de vue pratique, retenons que les lois établies pour les différences de potentiel en régime stationnaire s'écrivent en régime quasistationnaire de manière analogue pour les tensions, pourvu que les circuits de mesure ne soient pas le siège de phénomènes d'induction parasites.

## RÉFÉRENCES

- [1] H. GIÉ, *Conférence devant la section locale de l'Union des Physiciens*, Orléans, 1985.
- [2] J. Ph. PÉREZ, R. CARLES, R. FLECKINGER, *Electromagnétisme (vide et milieux matériels)*, à paraître, Masson 1990
- [2] M. FARADAY, *Experimental Research in Electricity*, series 2, section 208, 1831.