Introduction à l'étude des systèmes non linéaires *

par J.M. VIGOUREUX
Laboratoire de Physique Moléculaire
Université de Besançon
Faculté des Sciences et des Techniques, 25030 Besançon Cedex

1. LES SOLUTIONS OUBLIEES

1.1. Introduction

Nous nous proposons dans cet article de présenter quelques développements essentiels de la physique non linéaire tout en introduisant le lecteur à son vocabulaire.

Nous partirons pour cela d'une équation toute simple abordable par un élève de terminale ou de première. Nous montrerons comment nos habitudes de raisonnement nous en ont caché des solutions fascinantes ; nous analyserons le contenu de ces «solutions oubliées». Cette exploration nous permettra d'introduire quelques notions nouvelles comme celles de **systèmes dissipatifs, d'attracteurs, d'attracteurs étranges** ou de **chaos**.

Pour laisser l'imagination et la créativité de chacun libre de se développer dans sa propre direction, notre exemple principal ne sera pas choisi dans le domaine de la physique : nous étudierons l'évolution temporelle, au fur et à mesure des années, d'une population d'insectes installée sur une île. Cet exemple est emprunté à l'article de L.P. Kadanoff cité en bibliographie. Bien sûr, chacun pourra le transcrire dans son propre domaine : à chacun de nommer, selon ses goûts propres et ses centres d'intérêt, les habitants de son île.

Cette étude sera réalisée à la fois de manière algébrique et de manière numérique. L'usage d'un ordinateur permettant de tracer des

* cet article, ainsi que le suivant à paraître dans le bulletin de Mai n° 724, a été publié par l'IREM (Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques) de Besançon où l'on peut s'en procurer des exemplaires.

courbes peut être utile sans être toutefois nécessaire : une simple calculatrice à mémoire peut en effet suffire.

Au delà d'une acquisition de connaissances nouvelles nous voudrions que cet article puisse constituer une double invitation :

Invitation à regarder et à voir d'abord :

Certaines présentations de la physique risquent parfois de laisser croire à un savoir clos : l'essentiel est déjà découvert, étiqueté, délimité, classé. Même si la source de certains grands fleuves reste encore inconnue, même si certaines forêts demeurent d'accès difficile, la mappemonde des connaissances possède maintenant ses cartes et ses continents multicolores ont été largement explorés. Bien sûr, le retour de quelques voyageurs parlant de pays étranges vient périodiquement corriger cette idée mais les journaux qui leur font place mettent alors l'accent sur les trésors qu'ils rapportent, et négligent de parler de leurs questions restées sans réponses ou des somments qu'ils n'ont su gravir. Quelle aventure pourrait représenter la physique dans un tel contexte ? Masquer ses questions risque de nous faire perdre la possibilité d'observer et de nous étonner. La physique ne connait bien que les «systèmes simples» et tout autour de nous, la Nature regorge de phénomènes inexpliqués que nous avons souvent regardés sans jamais vraiment les voir :

– Pourquoi lorsque je viens de tourner mon café, l'écume reprend elle brusquement sa course après avoir presque trouvé le repos ?

– Pourquoi les cristaux de glace sont-ils si différents les uns des autres et comment font-ils pour croître ?

– Comment une aiguille de boussole s'affole-t-elle lorsque j'en approche simultanément deux aimants ?

– Y a-t-il quelque chose de commun entre les lézardes observées sur les murs ? serais je capable de les décrire... et pour cela, de les observer ?

Invitation à voir donc, mais aussi invitation à chercher :

Si un premier écueil est de croire que tout, ou presque, est déjà connu, un autre est de penser que de toute façon, ce qui n'est pas connu est une affaire de spécialistes qui ne nous concerne donc pas.

Souvent bien sûr, «les champs nouveaux de la science» nécessitent pour y pénétrer des équipements et des connaissances que seul le spécialiste ou le professionnel possède ; ce n'est pas toujours le cas : dans certaines régions, plus montagneuses, le paysage apparaît d'un coup plus dégagé : comme sur certaines photos d'Afrique, on domine soudain la forêt tropicale, apercevant le tracé du fleuve, la présence d'un village et là bas, d'une autre montagne. Le pays n'en est pas connu pour autant et seules quelques personnes entrainées pourront sans doute y pénétrer et s'y tracer un chemin. Mais de ces quelques points de vue privilégiés, chacun, quel qu'il soit, peut pourtant, lui aussi, scruter le paysage, essayer d'en comprendre les contours et participer à son niveau, à l'émotion de la découverte. La physique non linéaire fournit, à bien des égards, un tel exemple : sans pénétrer dans l'épaisse forêt des difficultés mathématiques et conceptuelles auxquelles se heurtent les spécialistes, il est possible d'arriver jusqu'à la crête sans beaucoup de connaissances, d'en explorer soi-même quelques pistes, de se poser des questions nouvelles et de voir, peut-être, ce que personne n'a encore su voir.

En permettant une étude numérique simple, l'équation que nous proposons d'étudier nous invite ainsi à nous situer, quel que soit notre niveau actuel de connaissance, non plus en touristes mais en explorateurs ; non pas en «consommateurs de physique» mais en «chercheurs». Elle nous ouvre une piste pour réaliser des «expériences numériques» et nous donne une méthode pour explorer d'autres équations plus complexes... Dans cette double invitation à observer et à chercher à comprendre, peut-être découvrirons-nous sur l'écran certains comportement dynamiques nouveaux que personne n'a encore observé.

2. LE MODÈLE LINÉAIRE

Notre système est une île habitée par des insectes. Pour la clarté de l'exposé nous allons supposer qu'ils pondent à la fin de l'été avant de mourir. Chaque année une nouvelle population voit le jour au printemps. Cette hypothèse qui évite aux différentes générations de se mélanger présente aussi l'avantage de transformer un problème continu en un poblème discret plus simple à exposer : grâce à elle nous pourrons raisonner année par année.

On note x_j la population d'insectes l'année «j». On étudie l'évolution de cette population au cours du temps : x_j est la «variable dynamique » du problème. Sa valeur l'année j+1 est fonction de sa valeur l'année j ; nous écrirons donc de manière très générale :

(1) $$x_{j+1} \quad f(x_j)$$

a) hypothèse de linéarité :

Dans cette première partie, nous considérons une relation linéaire entre x_{j+1} et x_j :

(2) $$x_{j+1} = a\, x_j \quad a \in R$$

La nécessité d'avoir toujours pour x_j une valeur positive impose la condition $a > 0$.

– Si $a > 1$, $x_{j+1} > x_j$; la population augmente chaque année ;
– Si $a < 1$, $x_{j+1} < x_j$; la population au contraire diminue.

Dans l'exemple choisi, le paramètre «a » pourrait servir à définir le «taux de croissance» (a-1) de la population. Cette notion, habituellement utilisée dans les problèmes démographiques, est cependant plus mathématique que physique : elle se contente de décrire la croissance sans inciter à en chercher les raisons. En physiciens, nous préférerons l'interpréter en termes de «conditions de vie sur l'île» :

– la condition $a > 1$, pour laquelle la population augmente chaque année définira un milieu «hospitatlier ».

– La condition $a < 1$, pour laquelle elle diminue et tend géométriquement vers 0 définira au contraire un milieu «inhospitalier».

b) propriété essentielle d'un système linéaire :

Les propriétés essentielles d'un système linéaire s'expriment dans les deux relations mathématiques suivantes :

(3a) $$f(x+x') = f(x) + f(x')$$

(3b) $$f((\lambda+\mu)x) = \lambda\, f(x) + \mu f(x).$$

La première (3a) signifie que si la population totale est formée de deux groupes comprenant chacun x et x' individus, sa valeur l'année suivante sera tout simplement obtenue en faisant la somme des populations nouvelles f(x) et f(x') de chacun de ces deux groupes considérés séparément.

La seconde (3b) exprime la manière dont agissent les influences extérieures sur la population d'insectes. Ces influences peuvent être diverses : température, existence de prédateurs, possibilité de trouver de la nourriture, etc... La linéarité signifie ici que la réponse du système est calculable en considérant séparément chacun de ces facteurs : la mortalité totale, par exemple, est égale à la somme des mortalités dues aux prédateurs, à la température excessive... etc.

En d'autres termes, et c'est là le point essentiel :

Dans un système linéaire

– il n'y a pas d'interactions entre les différents sous groupes x, x', ... qui définissent le système ;

– il n'y a pas non plus d'interaction entre les différentes influences a, b,... qui agissent sur lui et qui peuvent donc être considérées comme agissant séparément.

c) Critique de ce modèle

Utilisé sur de très nombreuses années, ce modèle peut conduire à des résultats aberrants. L'expression de x_{j+1} en fonction de la population initiale x_0 :

(4) $$x_{j+1} = a\,x_j \qquad x_{j+1} = a^{j+1}\,x_0$$

met en évidence cette difficulté :

– Si $a > 1$, (et si l'on attend assez longtemps), la population va tendre vers l'infini. L'expérience dément évidemment de tels résultats. Dans la réalité, la croissance finit toujours par être freinée : des facteurs négligeables quand la population est encore peu nombreuse prennent de l'importance quand elle augmente et viennent alors «briser» la dynamique initiale du système. Dans le cas d'une population, ces facteurs sont «politiques» (relations entre les différents sous groupes x, x'...) et «économiques» (relations au milieu matériel).

Ainsi le modèle linéaire ne peut-il être qu'une approximation méthématique de la réalité, sans doute acceptable si la population n'est pas trop importante et si l'on se contente d'analyser son évolution sur une période assez brève.

3. PRÉSENTATION DU MODÈLE NON LINÉAIRE

a) correction du modèle précédent :

Pour corriger le modèle précédent et le rendre apte à mieux décrire la réalité, il nous faut introduire dans l'équation (1) un terme destiné à «freiner» la croissance de la population quand elle devient trop grande et l'empêcher ainsi de «tendre vers l'infini». Plusieurs moyens mathématiques s'offrent pour cela. Nous choisirons ici d'introduire ce nouveau terme de manière additive.

– Pour qu'il puisse traduire ce freinage de croissance, ce terme devra nécessairement être **négatif**.

– Pour que son effet puisse être négligeable aux faibles valeurs de x devenir efficace à ses valeurs élevées, il devra de plus s'exprimer par une puissance de w strictement **supérieure à un**.

A l'ordre le plus bas, l'équation (1) peut donc être corrigée de la manière suivante :

(5) $$x_{j+1} = a\,x_j - r\,x_j^2 \qquad (r > 0)$$

– Si x est petit, le second terme est négligeable ; on retrouve le modèle linéaire et la population croît comme précédemment (éq (1)).

– Si la population augmente, le second terme, qui devient de plus en plus important, vient freiner l'augmentation démographique ; c'est bien ce que l'on cherchait.

Propriété essentielle de l'équation (5) : la population x_{j+1} n'est plus proportionnelle à x_j : le système est dit **non linéaire**.

b) propriété essentielle du modèle non linéaire

On vérifie facilement que l'équation (5) ne vérifie plus la condition (3a) : en prenant x = x' + x'', on trouve :

(6) $$f(x' + x'') = a(x' + x'') - r(x' + x'')^2 = f(x') + f(x'') - 2rx'x''$$

Ce résultat est fondamental : la population totale n'est plus la somme f(x') + f(x'') des valeurs que l'on aurait obtenues en considérant séparément chacun des sous groupes ; il existe maintenant un **terme d'interaction** 2rx'x'', dit **terme d'interférence**, entre les groupes. En comparant (6) et (3a), on voit que l'approximation linéaire correspond à négliger ce terme d'interaction.

On pourrait également exprimer une possible non linéarité entre les influences extérieures qui peuvent elles aussi «interférer» : il est en effet possible de subir simultanément l'influence des prédateurs et celle de la sécheresse ! Nous ne discuterons pas cette possibilité que chacun pourra explorer de lui même après avoir lu cet article.

Un système non linéaire est ainsi caractérisé par la présence d'un terme d'interaction entre les différents groupes qui le composent ou entre les différentes influences extérieures qu'il subit. Ces groupes ou influences ne peuvent donc plus être considérés comme agissant séparément.

c) méthode d'étude

Pour étudier l'évolution dynamique du système décrit par l'équation (5) nous ferons le changement de variable :

(7) $$x_j = (a/r)\, x_j$$

Cette transformation n'est pas nécessaire pour établir les résultats qui vont suivre, mais elle est utile :

- pour en simplifier les discussions
- et surtout, pour en faciliter l'étude numérique.

En utilisant (7) l'équation (5) devient :

(8) $$x_{j+1} = a\, x_j\, (1 - x_j)\; x_j \qquad \in [0,1]$$

La posivité du nombre x_j implique celle de x_j puisque a et r sont positifs. Cela nous permet de préciser le domaine de définition de (8) :

- pour que x_j reste positif, il faut avoir $ax_j(1 - x_j) > 0$. x_j doit donc rester inférieur à 1 quel que soit j.
- Pour que x_j reste inférieur à un, il faut également avoir $ax_j(1 - x_j) < 1$. $x_j(1 - x_j)$ prenant toutes les valeurs entre 0 et le maximum 1/4, cette inégalité impose de choisir a dans l'intervalle [0,4].

Avec ce choix, x_j restera toujours inférieur à 1 ; on comprend maintenant l'intéret du changement de variable (7) ; il s'agit d'une «précaution informatique» : si l'on veut représenter les variations de x_j sur un écran d'ordinateur, on a maintenant la garantie de ne jamais sortir de l'écran si on prend pour unité la totalité des échelles verticale et horizontale. Bien sûr, avec un tel changement de variable, x_j (qui n'est plus entier et qui reste inférieur à 1) ne peut plus être interprété comme une «population». Cela reste cependant un nombre qui la caractérise sans ambiguité. Par souci de clarté, nous conservons donc cette dénomination. La «vraie» valeur de la population sera obtenue quand on le voudra en utilisant (7).

Problème :

D'un point de vue mathématique, le problème peut maintenant se formuler de la manière suivante :

– étudier la transformation de l'intervalle [0,1] dans lui même, qui au point x associe le point ax(1-x). Cette transformation dépend du paramètre a > 0 ; nous nous contenterons dans cette étude de le faire varier entre 0 et 4.

Pour chaque valeur de a, on procèdera par itération à partir de x_0 :

(9)
$$x_1 = rx_0 (1-x_0)$$
$$x_2 = rx_1 (1-x_1)$$
$$x_3 = ...$$

Cet exemple permet une étude algébrique simple du phénomène : il est également facile à programmer et permet donc également une exploration numérique. L'usage d'un micro-ordinateur présente pour cela l'avantage de permettre la visualisation des variations de x. Une simple calculette programmable peut cependant suffire.

4. PREMIÈRE APPROCHE

a) cas d'un milieu inhospitalier (a < 1)

Dans un milieu inhospitalier, les insectes voient leur population diminuer chaque année pour tendre finalement vers 0. Leur dynamique démographique, représentée sur la figure (1) pour plusieurs valeurs de la population initiale x_0, met en évidence le résultat suivant : *la même limite $x_l = 0$ est atteinte quelle que soit cette valeur initiale x_0*... Bien qu'apparemment sans importance, cette remarque mérite d'être soulignée de manière toute particulière. Elle signifie en effet qu'*il n'est pas toujours important de connaitre les conditions initiales d'un problème pour prévoir son évolution.* Nous reviendrons sur ce point qui nous promet bien des surprises.

Un cas particulier à considérer est bien sûr celui où la valeur initiale de la population est déjà la valeur limite «0». Dans ce cas, le système n'évolue pas. On exprime cette propriété en disant que la valeur x = 0 est un **point fixe** de la transformation (8). Son sens «physique» est immédiat: si la population est nulle au départ, elle ne peut que rester nulle au cours du temps ; en d'autres termes : il n'y a pas de génération spontanée.

En prenant différents exemples numériques, on vérifiera aussi que si l'on s'éloigne un tant soit peu de ce point fixe, on y revient invariablement : il est inutile d'essayer de repeupler une île inhospitalière : lorsque la race s'est éteinte, l'apport de quelques nouveaux insectes ne pourra rien changer : la population brusquement écartée de sa valeur nulle y reviendra quelques années plus tard. On exprime ce résultat en disant que la limite $x_l = 0$ est **stable**. Par analogie avec l'image mécanique où une bille écartée de sa position d'équilibre au fond d'un bol y revient immanquablement si on l'en écarte, on dit aussi qu'il s'agit d'un **équilibre stable.**

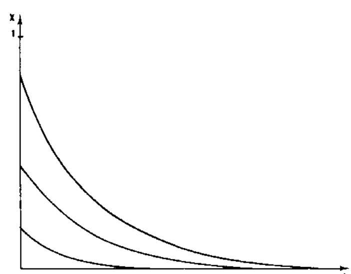

Figure 1 : Évolution temporelle de la population d'insectes dans le cas d'une île inhospitalière ($a < 1$) : quelle que soit sa valeur initiale, la population tend vers 0 au fil des années. Notons que la courbe apparait ici lissée pour des raisons de clarté ; il s'agit en réalité de points correspondant chacun à une année différente.

Il peut être intéressant de pouvoir suivre graphiquement et sans ordinateur, l'évolution du nombre d'insectes au fil des années.

Un moyen simple pour cela est de tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = ax(1-x)$. Nous l'avons fait sur la figure (2) sur laquelle nous avons également représenté la première diagonale (pour $a < 1$, la pente de la courbe à l'origine étant inférieure à un, les valeurs de $f(x)$ sont toutes en dessous de cette diagonale). Pour lire l'évolution démographique, nous prenons la valeur initiale x_0 et nous lisons sur l'axe des ordonnées la valeur $x_1 = f(x_0)$ qui lui correspond l'année suivante ; nous pouvons alors continuer le processus en reportant x_1 sur l'axe des abscisses pour lire de même, sur l'axe des ordonnées, la valeur x_2 correspondante... et ainsi de suite. Le transport des valeurs successives obtenues de l'axe des ordonnées sur l'axe des abscisses pourrait se réaliser au compas. Il est cependant plus astucieux d'utiliser la première diagonale : partant verticalement de la valeur x_0 on rencontre la courbe au point d'ordonnée x_1. Pour reporter cette valeur sur l'axe des abscisses, il n'est pas nécessaire d'aller comme précédemment jusqu'à l'axe des ordonnées : il suffit en effet de s'arréter à la première diagonale et de redescendre verticalement.

Cette construction nous permet de visualiser simplement la dynamique du système : partant du point de x_0 nous allons jusqu'à la courbe où nous trouvons x_1 ; nous évoluons ensuite successivement à l'horizontale et à la verticale en changeant de direction chaque fois que nous rencontrons l'une des deux courbes (figure 2).

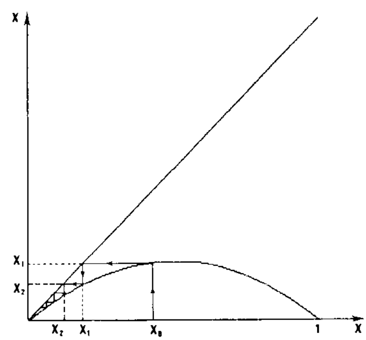

Figure 2 : Évolution temporelle de la population d'insectes dans le cas d'une île inhospitalière : A cause de la condition $a < 1$, la courbe représentative de la fonction $y = ax(1-x)$ est en dessous de la première diagonale. En partant de la valeur initiale X_0 de la population les valeurs successives X_1 X_2 X_3 sont obtenues en cheminant entre les deux courbres comme l'indiquent les flèches.

Ces «rebondissements» successifs illustrent les variations de la population d'insectes, qui, «coincée » entre deux courbes qui se rapprochent de plus en plus l'une de l'autre, tend irrémédiablement vers leur point commun $x = 0$.

b) cas d'un milieu hospitalier (a > 1)

Le milieu est maitenant «hospitalier». Nous pouvons donc nous attendre à une croissance de la population. Cette dernière toutefois ne se traduira pas par une augmentation «infinie» du nombre d'insectes puisque le terme non linéaire a été justement introduit pour empêcher un tel comportement «non physique».

Avant d'analyser la situation de manière algébrique, explorons quelques exemples avec notre calculatrice ; essayons par exemple a = 1.9 et a = 2.85 en choisissant dans chaque cas différentes valeurs initiales x_0 de la population. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 3 et 4.

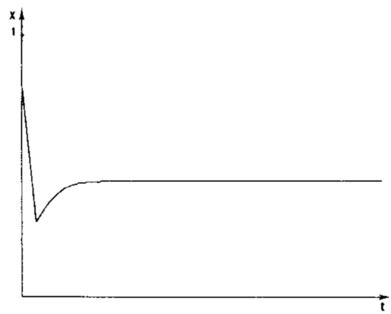

Figure 3 : Évolution de la population d'insectes dans le cas d'une île hospitalière (a > 1). les conditions choisies sont ici : a = 1.9 et x_0 = 0.8. Au fil des années, la population tend vers une valeur limite non nulle. On vérifiera que cette même limite est atteinte quelle que soit la valeur initiale x_0 de la population.

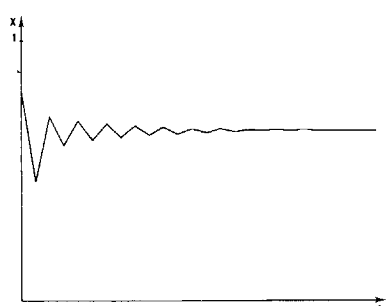

Figure 4 : Évolution temporelle de la population d'insectes dans le cas d'une île hospitalière (a > 1). Les conditions choisies sont ici : a = 2.85 et x_0 = 0.8. Au fil des années, la population tend vers une valeur limite non nulle. On vérifiera que cette même valeur est atteinte quelle que soit la valeur initiale x_0 de la population.

Cette «expérience numérique» suggère plusieurs remarques :

– *Le système tend toujours vers une limite non nulle.*

– *La valeur numérique de la limite atteinte dépend du paramètre d'hospitalité «a» (elles sont respectivement dans les deux* *cas* x_l *=* 0.4736..., x_l *= 0.6491...) et non pas des valeurs initiales* x_0 *de la population.*

– Plusieurs comportements sont possibles pour atteindre ces valeurs limites : croissance ou décroissance monotone, régime périodique, régime apériodique critique...

Pour comprendre ces différentes dynamiques, nous pouvons les visualiser comme nous l'avons fait au paragraphe précédent en traçant la courbe représentative de la fonction f(x) = ax(1-x) pour différentes valeurs de «a» et en nous aidant de la première diagonale pour suivre l'évolution démographique de la population d'insectes au cours des années. Le paramètre de croissance étant maintenant a > 1, la pente à l'origine de la courbe représentative de la fonction f(x) est supérieure à 1 ; cette dernière est donc partiellement au dessus de la première diagonale. C'est dans cette différence que réside l'explication de ce comportement nouveau du système.

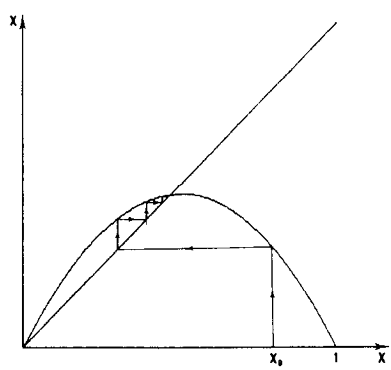

Figure 5 : Évolution temporelle de la population d'insectes dans le cas d'une île hospitalière. La valeur choisie pour le paramètre a est ici a = 1.9 :
– la condition a > 1 impose à la courbe représentative de la fonction y = ax(1-x) de couper la première diagonale. En partant de sa valeur initiale X_0. les valeurs successives X_1 X_2 X_3 de la population sont obtenues en cheminant entre la courbe et la première diagonale comme l'indiquent les flêches. On vérifiera facilement que l'on tend toujours vers la même limite non nulle quelle que soit la valeur X_0 de la population initiale.

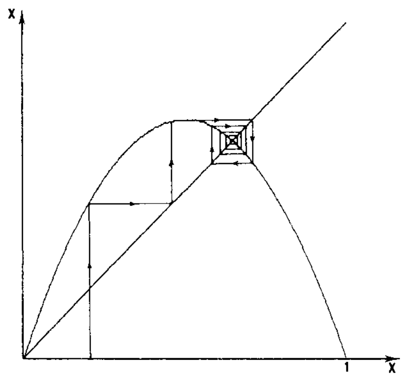

Figure 6 : Évolution temporelle de la population d'insectes dans le cas où a = 2.85 : la valeur limite de la population, obtenue comme dans la figure précédente, est atteinte par amortissement d'un régime périodique.

– Sur la figure (5), le chemin successivement horizontal et vertical entre les deux courbes nous conduit de manière monotone vers une valeur limite.

– Sur la figure (6), nous voyons au contraire la population prendre un comportement oscillatoire de plus en plus amorti autour de cette limite avant de s'y arrêter.

Les raisonnements ci-dessus nous ont offert une première approche du résultat cherché. Nous nous proposons maintenant de l'étudier algébriquement en calculant la valeur limite x_l de la population :

Il est simple pour cela de raisonner de la manière suivante : quand x est assez près de cette limite x_l (si elle existe), on peut écrire $x_{j+1} \sim x_j \sim x_l \sim$. Ce procédé est justifié par le fait que lorsque l'on approche de la limite, l'erreur faite en procédant ainsi peut-être «aussi petite que l'on veut». L'équation (8) s'écrit alors :

(10) $$x_l = a\, x_l\ (1-x_l)$$

Sa mise en facteurs conduit à deux valeurs possibles de x_l :

(11) $$x_j = 0$$

$$x_l = (a-1)/a$$

L'existence de deux solutions alors que nous cherchions une limite, et donc un résultat unique, peut suprendre. Leur sens est cependant clair :

– lorsque a < 1, seule la première valeur $x_l = 0$ est à considérer puisque x_j est un nombre positif ; nous retrouvons bien une valeur unique déjà discutée dans le paragraphe (4,a)

– lorsque a > 1, les deux solutions (11) sont a priori possibles. Étudions leur signification :

Notons tout d'abord qu'il n'est pas étonnant de retrouver la solution $x_j = 0$ déjà obtenue pour a < 1 puisque cette valeur est un **point fixe** de la transformation :

– Si la population initiale x_0 est rigoureusement nulle, elle reste constamment égale à 0 et cela quelle que soit la valeur de a.

– On vérifiera cependant qu'il ne s'agit plus d'une solution stable : si $x_0 = 0$, la population reste nulle mais si l'on s'en écarte d'une valeur «aussi petite que l'on veut», elle ne revient pas à 0 mais se met au contraire à croître et à tendre vers la seconde limite possible $x_l = (a-1)/a$.

Cette propriété peut s'observer sur les deux courbes 5 et 6 en prenant des points très proches de l'origine. Il est également intéressant de la vérifier à l'aide d'une calculatrice : dans le cas où a = 2, la limite est atteinte avec une précision de 8 chiffres après la virgule après seulement 18 itérations si la valeur initiale choisie est $x_0 = 0{,}00005$!

En comparant la dynamique ainsi obtenue avec celle de la figure 2, on s'aperçoit que le point fixe $x_0 = 0$ n'est stable que si la pente de la tangente à la courbe en x_0 est inférieure à un. D'une manière générale il faut écrire :

(12) $$\text{stabilité en } x_m \Leftrightarrow |f(x)'|_{x\,=\,xm} < 1$$

Le point $x_l = 0$ obtenu en (11) n'est donc pas stable. A cause de cette instabilité, cette valeur ne peut pas être considérée comme une «vraie limite» : c'est la «limite» atteinte dans le seul cas particulier où la population initiale x_0 est nulle, c'est à dire dans le seul cas ou notre île n'est pas peuplée.

Ainsi, dans le cas où a > 1, la seule véritable limite est bien la seconde solution (11) $x_l = (a-1)/a$ qui seule est **stable**. On vérifie qu'il s'agit bien sûr aussi d'un **point fixe** : si l'on prenait pour valeur initiale $x_l = (a-1)/a$, la population resterait constante au cours du temps.

Cette observation suggère un autre raisonnement pour écrire l'équation (10) : la valeur limite une fois «atteinte», la population ne pourra plus évoluer et gardera la même valeur au fil des années. Partant ainsi de $x_j = x_t$, on retrouvera l'année suivante $x_{j+1} = x_l$. Ce raisonnement qui a l'inconvenient de laisser à désirer sur le plan mathématique (une limite n'est jamais atteinte) a le mérite de souligner qu'une limite est toujours un point fixe de la transformation considérée.

Pour résumer nos résultats :

le point fixe x = 0 (trouvé pour a < 1) reste un point fixe de la transformation quand a devient supérieur à 1, mais il **perd sa stabilité au profit d'une nouvelle valeur limite x_l = (a-1)/a qui, elle, est stable.**

Pour résumer tous ces résultats, nous avons représenté sur le figure 7 les variations de la limite de la population de l'île en fonction du paramètre a. Un trait plein correspond à une limite stable ; les pointillés correspondent à un point fixe instable.

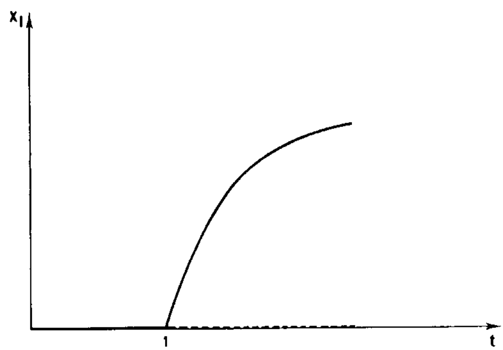

Figure 7 : Variations de la valeur limite de la population de l'île en fonction des valeurs du paramètre a. Les solutions stables sont en trait plein ; les solutions instables en pointillés. Entre 0 et 1, la limite stable est x = 0 ; la valeur de la population finale est toujours nulle. Lorsque a > 1, la limite précédente x = 0 perd sa stabilité (pointillés) au profit d'une autre valeur non nulle x = (a-1)/a. (trait plein).

c) quelques réflexions concernant ces résultats.

1) Dans les deux paragraphes précédents, nous avons vu la population tendre vers une valeur limite indépendante de sa valeur initiale comme si tous les cas possibles de population étaient invariablement «attirés» par cette même valeur finale et perdaient peu à peu leurs

différences en «oubliant » leurs conditions initiales. On traduit aujourd'hui ce phénomène en disant que cette limite est un **attracteur**.

La notion d'attracteur est particulièrement riche en physique... et mérite de s'y arrêter : les physiciens, habituellement marqués par les développements de la mécanique, raisonnent le plus souvent inconsciemment en termes de conditions initiales : si nous réussissons à déterminer les conditions initiales du problème, nous saurons déterminer complètement son évolution future... C'est là le vieux rêve de Laplace : «une intelligence qui pour un instant donné, connaitrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent,(...) embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé serait présent à ses yeux».

Dans le cas de l'exemple choisi, un automatisme de physicien chargé d'une mission de prospective démographique sur l'île pourrait être le suivant :

– pour connaitre la valeur limite de cette population d'insecte, je vais tout d'abord évaluer la population actuelle avec le plus de précision possible... je reviendrai ensuite faire quelques «échantillonnages» à intervalles réguliers... Nous avons compris que notre chercheur perdrait son temps : qu'importe la valeur initiale de la population si la limite atteinte n'en dépend pas ! Le premier problème à considérer est de chercher s'il existe ou non un **attracteur** des états de population. Pour cela, la première chose à faire ici n'est pas de recenser mais de mesurer le paramètre «a »... (notons que notre chercheur pourrait bien sûr sauver la face : dans le cas présent, le seul moyen de mesurer «a » est de compter différents x_i. L'attitude profonde des deux démarches est cependant très différente !).

Pour transcrire ce problème dans un cadre physique connu, il est un exemple célèbre où apparait «incognito » un tel attracteur : la connaissance de l'évolution thermodynamique d'un gaz ne nécessite heureusement pas de déterminer les positions et les vitesses initiales de chacune des molécules du gaz ! l'équilibre thermodynamique, calculable de manière simple, est un attracteur de tous les états de non équilibre.

Pour conclure cette première remarque, la première question à se poser avant d'aborder l'étude dynamique d'un système devrait être la suivante : existe-t-il ou non un attracteur ?... Étudiée par les mathématiciens cette question est souvent, hélas, très difficile à résoudre.

2) Dans les deux cas étudiés, le système tend naturellement vers une valeur limite stable. De tels systèmes, dont l'attracteur est un état d'équilibre (toutes les «trajectoires » se dirigent vers un équilibre), sont appelés des **systèmes dissipatifs**. Cette dénomination est directement issue de la thermodynamique.

3) Les exemples étudiés dans les paragraphes a et b appellent encore une troisième remarque : lorsque a < 1 l'attracteur est l'état x = ; lorsque a > 1, c'est l'état x = (a-1)/a ; la valeur a = 1 est ainsi une valeur bien particulière du paramètre dynamique du système : pour cette valeur, l'équilibre stable primitif des détruit au profit d'un autre. Ce changement va se traduire physiquement par des solutions finales très différentes : dans le sesond cas, les insectes établissent sur l'île une colonie permanente ; dans le premier au contraire, ils disparaissent complètement ! Dans un système dissipatif, cette disparition d'un équilibre (vie de la colonie) au profit d'un autre (celui de sa mort) est ce que l'on appelle, à la suite de René Thom, une **catastrophe** . La valeur critique a = 1 du paramètre qui fait passer la population de la vie à la mort certaine est une **valeur catastrophique** de la démographie de l'île. La «théorie des catastrophes» décrit en sept catastrophes élémentaires, toutes les catastrophes possibles des systèmes dissipatifs.

Pour illustrer concrètement cette notion, il est possible de construire, avec un élastique et du carton, une «machine à catastrophes». La manière de construire une telle «machine», initialement proposée par E.C. Zeeman, est présentée en annexe.

d) Le problème rebondit.

L'étude précédente parait assez simple mais pourtant ne nous y fions pas, car nous y avons fait une très grave erreur de raisonnement. Cette erreur ne concerne pas les résultats obtenus (ils sont tous exacts), mais la façon dont nous les avons obtenus. Elle est grave car elle nous a rendu aveugle à une foule de phénomènes nouveaux...

Pour essayer de comprendre où se cache cette erreur, reprenons l'essentiel de notre démarche :

– dans le cas où a < 1, nous avons vu la population tendre géométriquement vers 0.

– dans le cas $a > 1$, nous avons trouvé au contraire une population croissante. Sachant «par construction de notre équation non linéaire», qu'elle ne pouvait tendre vers l'infini, nous en avons déduit qu'il devait exister une limite que nous avons ensuite calculée.

– dans tous les exemples choisis, l'existence de cette limite a pu être confirmée à la fois de manière analytique (en étudiant des courbes) et de manière numérique (à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur).

– ces différentes méthodes nous ont permis ainsi de comprendre non seulement l'existence de ces limites, mais aussi des différents chemins possibles pour les atteindre.

Ces quelques lignes résument les pages précédentes. L'erreur dont nous parlions s'y cache. Arrêtons nous le temps qu'il faut pour essayer de la découvrir nous mêmes.

Pour guider notre réflexion, le même type d'erreur se cache dans l'histoire policière suivante : «le cadavre est trouvé en pleine nuit sur la descente de lit. L'enquête montre qu'il y avait alors douze personnes dans la maison et qu'aucune n'a pu sortir ou entrer entre le début de la soirée précédente et la matinée. Onze des personnes présentes ont un alibi absolument irréfutable. L'inspecteur arrête donc la douzième... et commet ainsi une abominable erreur judiciare. Quelle peut être cette erreur ?

Dans ce cas, comme dans celui de l'étude de notre population d'insectes, l'erreur de raisonnement est du même type : *la solution finale, (ou une partie de cette solution), est inconsciemment postulée... et la démonstration est ensuite organisée pour trouver le résultat prévu :*

– dans notre histoire policière, la solution postulée est qu'il s'agit d'un crime alors qu'il peut s'agir d'un suicide ou d'une mort naturelle,

– dans notre étude, nous avons postulé de même l'existence d'une limite : nous somme sûrs que la population ne tend pas vers l'infini, <u>donc</u> nous postulons l'existence d'une limite, et nous organisons notre raisonnement pour la trouver... La limite ainsi trouvée existe effectivement, mais le problème est qu'ayant organisé tout notre raisonnement pour essayer de la mettre en évidence nous sommes passés à côté de nombreuses autres solutions ! Ce n'est pas la première fois qu'un arbre cache une forêt ! Il est important de s'arrêter quelques instants sur cette ambiguité de toute recherche : on ne peut pas chercher sans idée préconçue («vous ne me chercheriez pas si vous ne m'aviez pas déjà trouvé»), mais une idée préconçue nous rend souvent aveugle à tout ce qui n'est pas d'elle !

Pour revenir à notre problème, nous avons donc oublié des solutions ! Mais de quelles solutions s'agit-il ? En pourquoi notre interrogation mathématique du problème ne nous y a t'elle point naturellement conduit ? Les mathématiques ne constitueraient-elles pas des rails toujours fiables, nous dispensant même de réfléchir ? Tout se passe en fait comme dans les films policiers où nous entendons souvent des dialogues comme celui-ci :

– l'inspecteur : «pourquoi ne m'avez vous pas raconté tout cela lorsque je vous ai interrogé ?»

– le témoin : «Mais, Monsieur l'inspecteur, vous ne me l'avez jamais demandé».

La Nature réagit souvent comme le témoin lorsqu'elle est interrogée par le physicien : *elle n'en dit pas trop et ne répond qu'aux questions bien posées.* Nous lui avons demandé au début du paragraphe b s'il existait une limite x_1 vers laquelle tendait la population. Elle a répondu à notre questiopn par l'affirmative ; elle ne nous a pas trompé : cette limite existe bien !... mais nous avons omis de lui demander si la dynamique de croissance pouvait «tendre» vers autre choses qu'une limite! A cette autre question, elle nous aurait également répondu : «oui». Mais alors :

– le physicien : «Pourquoi ne me l'avez vous pas dit lorsque je vous ai interrogée ?»

– la Nature : «Mais vous ne me l'avez jamais demandé !»

Oubliant pendant logntemps de poser cette question, les physiciens et mathématiciens ont aisni oublié de nombreuses autres solutions possibles de l'équation (8)... ignorant ainsi toute une classe de phénomènes étonnants. C'est pour insister sur ce point que nous avons intitulé cet article : «**les solutions oubliées**». Pour les trouver, il nous faut maintenant reprendre notre interrogatoire ! Cela ne va pas forcément être simple car la Nature, nous l'avons dit, n'est pas bavarde ; elle n'accepte bien souvent de ne répondre que par «oui» ou par «non». Si nous lui demandons simplement : «Quelles solutions avons nous oubliées ?» il ne faut pas s'attendre à obtenir d'elle la moindre réponse ! Il nous faut donc lui poser une question précise, mais quelle question pouvons nous donc lui poser ?

Un moyen d'éclairer ce problème, est de l'explorer à l'aide de notre calculatrice en y entrant différentes valeurs des paramètres. Peut-être le hasard viendra t'il nous aider en nous laissant percevoir quelques unes de ces étranges solutions ! Il nous faudra alors apprendre à les observer pour parvenir alors à les décrire et à les traduire en questions.

Nous sommes maintenant sur la crète ! Nous dominon l'enchevêtrement sombre des lianes et de la forêt. Sentant la présence le quelque chose d'insolite, nous scrutons l'horizon pour essayer de lui donner un nom. Nous n'avons rien d'autre à faire qu'à observer. Si notre calculatrice ou notre ordinateur «s'affole», regardons bien ce qui se passe... et peut-être verrons nous.

Ici se termine le «jardin à la française » des solutions «classiques». Ici, même pour un élève de terminale ou de première peut commencer la rechercher !

(à suivre...)

ANNEXE 1 : LA «MACHINE À CATASTROPHES » DE ZEEMAN

E.C. ZEEMAN (il ne s'agit pas du physicien de «l'effet Zeeman») a construit une «Machine à catastrophes » formée d'une roue, fixée à plat sur une planche et trounant librement autour de son centre. A un point de sa périphérie sont fixés deux élastiques assez résistants. L'extrémité de l'un est fixée directement sur la plancge à une distance suffisante de la roue pour qu'il puisse toujours rester tendu. L'expérimentateur tient l'extrémité du second dans la main et la déplace sur le plateau.

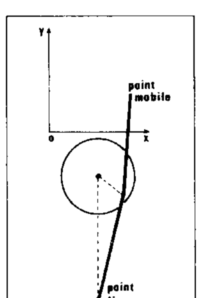

Figure 8 : La «machine à catastrophes» de ZEEMAN.

Dans de telles conditions, l'équilibre de la roue, qui résulte de la tension des élastiques, dépend de la position du point d'application de l'élastique mobile : les deux coordonnées de ce point sont les «paramètres» de la machine de Zeeman :

– dans le texte ci-dessus, la population de l'île pouvait évoluer de manières très différentes suivant les valeurs du paramètre a,

– dans la machine de Zeeman, il n'y a pas besoin d'ordinateur pour modifier les conditions du système : faire varier ses paramètres signifie tout simplement promener l'extrémité libre de l'élastique sur la planche.

En se promenant ainsi sur le plateau, on découvre vite l'existence d'une zone curieuse délimitée par une sorte de quadrilatère au coins effilés chaque fois que l'on franchit sa frontière, on observe une catastrophe... Mais il est inutile d'en dire plus : il n'est pas difficile de construire cette machine... alors construisons là et observons bien **tout** ce qui se passe.

Au cas où nous aurions besoin d'un peu d'aide, le détail des phénomènes observables à l'aide de cette machine est présenté dans le livre d'I. Ekeland donné en bibliographie.

BIBLIOGRAPHIE

a) articles ou ouvrages non spécialisés :

P. BERGE, Y. POMEAU La turbulence, La Recherche 110 (1980) p. 422

J.P. BRISSET Oscillations chimiques : Systèmes chimiques oscillants Bull. Union des Phy. 629 (1980) 371

V. CROQUETTE Déterminisme et Chaos Pour la Science n° 62 1982 p. 62

M. DUBOIS Le Calcul, l'Imprévu. Sueil, Points-Sciences (1984)

I. EPSTEIN, K. KUSTIN, P. DE KEPPER, M. ORBAN, La réaction chimique oscillante. Pour la Science n°67 (1983) p. 69

M.J. FEIGENBAUN Universal behaviour in nonlinear systems Los Alamos Science. Summer 1980 p. 26

M. HENON La diffusion chaotique. La Recherche 209 (1989) p. 490

D. HOFSTADTER Jeux mathématiques. Pour la Science n°53 (1982)

L. P. KADANOFF Roads to Chaos. Physics Today, Décembre (1983) p. 46

C. KAPPENSTEIN La cinétique chimique : théorie et expérience. Bull. Union des Phys. 644 (1982) 851

D. RUELLE Les attracteurs étranges. La Recherche 108 (1980) p. 132

D. RUELLE Déterminisme et prédicibilité. Pour la Science 82 (1984) p. 58

C. VIDAL, J. C. ROUX La turbulence chimique existe t-elle ? La Récherche 107 (1980) p. 66

C. VIDAL, J. C. ROUX Comment naît la turbulence. Pour la Science 39 (1981) p. 50

J. WALKER Expériences d'amateurs. Pour la Science n°11 (1978).

b) ouvrages spécialisés :

P. BERGER, Y. POMEAU, C. VIDAL L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence Hermann (1984).

I. PRIGOGINE Physique, Temps, Devenir Masson Paris (1980).

C. SPARROW The Lorenz equations. Springer Verlag (N.Y) (1982).

R. THOM Stabilité struturelle et morphogénèse. Benjamin (New-York) (1972).

(et bien d'autres que nous nous excusons de ne pouvoir citer...)