Simulation informatique de quelques points de Mécanique inaccessibles à l'expérience

par Marcel MANCINI
84300 Cavaillon

L'impossibilité d'expérimentation et la place occupée par les raisonnements spontanés ont pour conséquence de laisser le plus souvent l'auditoire perplexe devant certaines propositions.

On ne peut pas ne pas évoquer à ce sujet le Principe d'interaction (ou Principe des actions réciproques) appliqué aux forces de gravitation. Les élèves ont beaucoup de peine à admettre que si la Terre exerce sur un grain de sable une certaine force, le grain de sable exerce sur la Terre une force opposée et de même norme. On a beau ajouter que dans ce dernier cas, les effets de l'attraction ne sont pas perceptibles, on ne convainc pas pour autant car on reste trop dans l'abstrait.

C'est dans de telles situations qu'il importe de profiter de l'outil informatique pour rendre notre enseignement à la fois plus attrayant et efficace.

Dans ce qui suit, nous présentons un traitement informatique relatif à l'interaction gravitationnelle à deux corps en fonction du rapport des masses.

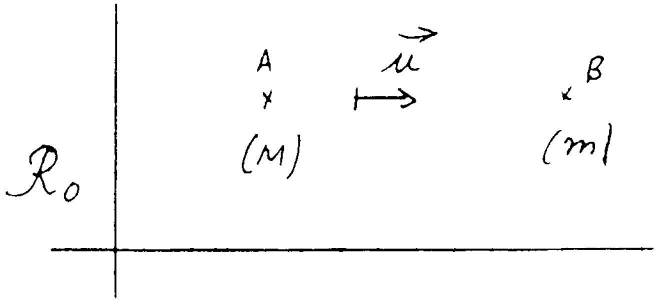
Le programmme sera donné en langage BASIC convenant aux ordinateurs LOGABAX PERSONA 1600 et THOMSON MO-5 qui équipent la plupart des Lycées.

Toutes les valeurs numériques seront également fournies.

1. MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME

Supposons deux particules, de masses M et m, en interaction de gravitation. A $t = 0$, elles sont en deux points A et B, à une distance r_0 l'une de l'autre.

Nous nous limiterons au mouvement de chacune de ces particules suivant l'axe AB, le référentiel d'étude étant galiléen. (R_0). (fig. 1).



$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de l'axe AB, nous écrivons pour la loi de force :

$$\vec{F}_{A \to B} = -\frac{\mathcal{G}.M.m}{r^2}.\vec{u} = m.\left(\frac{-\mathcal{G}M}{r^3}\vec{r}\right) = m\,\vec{a}_B$$

en appliquant ensuite le principe fondamental de la dynamique, $\mathcal{G}$ étant la constante de gravitation, $\vec{r}$ le vecteur position $\vec{AB}$ à un instant donné et $\vec{a}_B$ l'accélération de la particule de masse m.

Le principe d'interaction nous autorise à écrire :

$$\vec{F}_{B \to A} = \frac{\mathcal{G}\,M.m}{r^3}\vec{r} = M.\left(\frac{\mathcal{G}\;m\,\vec{r}}{r^3}\right) = M\,\vec{a}_A$$

$\vec{a}_A$ étant le vecteur accélération, dans R_0, de la particule de masse M.

$$\vec{a}_A = \frac{\mathcal{G}.m}{r^3}\vec{r} \quad ; \quad \vec{a}_B = -\frac{\mathcal{G}.M}{r^3}\vec{r}$$

Posons $M = km$ $(k > 1)$ et $m = 1$ alors $M = k$.

Par suite :

$$\vec{a}_B = -\frac{\mathcal{G}.k}{r^3}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{a}_A = \frac{\mathcal{G}.\vec{r}}{r^3}$$

Avec un choix convenable des unités :

$$\vec{a}_B = -k\,\vec{a}_A,\ \vec{a}_A = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

2. LE PROGRAMME

Nous ne rappellerons pas la méthode d'intégration numérique (voir si besoin «MÉCANIQUE» - volume 1 - par H. Gié et J.P. Sarmant - Collection Baillière et les articles de J.P. Sarmant BUP n° 672).

Les abscisses des particules A et B seront notées D et F, leurs vitesses U et V, le pas d'incrémentation H.

Programme sur Logabax

```
10  SCREEN 3
20  INPUT k, D∅, F∅, U∅, V∅, H.
30  D = D∅ : F = F∅ : U = U∅ : V = V∅
35  REM * k = rapport des masses des particules A et B ; D∅ et F∅
          sont leurs abscisses respectives initiales, U∅ est la vitesse
          initiale de A, V∅ celle de B *
40  GOSUB 160
50  U = U + A * H : V = V + B * H
60  D = D + U * H : F = F + V * H
70  G = (F + K * D)/(K + 1) : PSET (G, 110)
80  IF R < ∅ THEN 120
90  PSET (D, 100)
100 PSET (F, 100)
110 GO TO 40
120 END
160 R = (F - D)
170 A = 1/R/R : B = -k/R/R
180 RETURN
```

Mentionnons que A et B sont les accélérations de chacune des particules en interaction.

Commentaires de quelques points particuliers du programme

La ligne 80 contient le test arrêtant le programme de telle sorte que les particules n'aillent pas au delà du point de collision.

La ligne 70 définit la position du centre de masse de l'ensemble des deux particules en interaction. La valeur 110 donnée à l'ordonnée de ce point a été choisie de telle sorte que la trajectoire de chacune des deux particules ne soit pas portée par le même axe que la trajectoire du centre de masse (raisons de clarté).

On se servira d'imprimantes avec ce type d'ordinateur.

Programme sur Thomson MO-5

Supprimer la ligne 10.

Remarque : Il est indispensable d'arrêter le programme au moment où les particules vont se rencontrer – et autant que faire se peut – sans intervention manuelle sur le clavier de l'ordinateur.

Les élèves (dont certains en savent déjà «long» sur la programmation) suggèrent d'emblée IFR = 0 THEN 120... et ça ne marche pas !

Voilà au passage une excellente occasion d'exploiter cet échec en invitant l'auditoire à la réflexion.

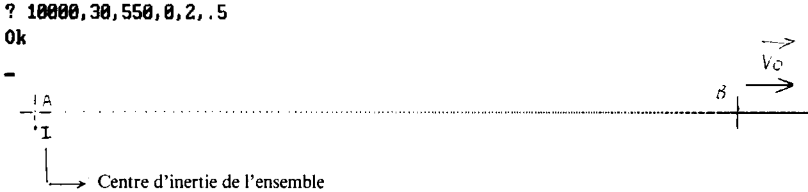
On observe à nouveau (en remployant le Test IFR = 0 etc..) comment défilent les points sur l'écran, c'est toujours spectaculaire. La réponse est alors trouvée en remontant aux algorithmes lignes 50 et 60... et la méthode employée pour les résoudre.

Il existe assi un test temporel pour arrêter le programme, mais il faut au préalable faire quelques essais, ce qui nécessite un peu plus de temps. Mais le test spatial, plus naturel ici, me paraît plus judicieux à exploiter.

3. LES RÉSULTATS

Document 1

```
Ok
run
? 10000,30,550,0,2,.5
Ok
```



Du point B au point C : mouvement retardé pour la particule de masse m. De C en A, son mouvement est accéléré.

A $t = 0$, la particule A de masse $M >> m$ (m : masse de la particule B) est au repos dans R_0. Au même instant, la particule B a une vitesse initiale $\vec{V_0}$. Cette dernière se déplace d'abord vers la droite en ralentissant, rebrousse ensuite chemin pour accélérer vers la particule A. On remarque que le centre d'inertie I de l'ensemble est pratiquement au repos. Il reste quasiment à la position qu'il occupait à $t = 0$.

Sur le plan quantitatif, on pourra vérifier quelques conséquences du modèle utilisé dans le programme.

Nous avons établi $\vec{a_A} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ et $\vec{a_B} = -k\vec{a_A}$, les accélérations étant mesurées au même instant. Ici, par conséquent $\frac{\|\vec{a_B}\|}{\|\vec{a_A}\|} = k$.

Sur le document 2, pour les points A_1 et B_1, on peut vérifier, en mesurant les vitesses instantanées pour des points encadrant A_1 et B_1 :

$$\|\vec{a_{B1}}\| \simeq \frac{5}{4H^2} \quad ; \quad \|\vec{a_{A1}}\| \simeq \frac{1}{4H^2}$$

Par suite $\frac{\|\vec{a_{B1}}\|}{\|\vec{a_{A1}}\|} \simeq 5$ alors que $k = 5{,}5$. Dicussion sur la précision des mesures.

Faisons maintenant varier la masse de la particule A. Soit d'abord M_1 sa valeur. A la date t_1, l'accélération de la particule B est telle que $\|\vec{a_{B1}}\| = -\frac{k_1}{r^2_1}$. Soit maintenant une autre valeur M_2 de la masse de la particule A. A la date t_2, l'accélération de la particule B est $\|\vec{a_{B2}}\| = -\frac{k_2}{r^2_2}$.

$$\text{Donc } \frac{\|\vec{a_{B1}}\|}{\|\vec{a_{B2}}\|} = \frac{k_1\, r^2_2}{k_2\, r^2_1}$$

Si par exemple $r_1 = r_2$ (photos 1 et 2 prises à la même distance sur l'écran) alors :

$$\frac{\|\vec{a_{B1}}\|}{\|\vec{a_{B2}}\|} = \frac{k_1}{k_2}$$

Sur la photo 1 $\|\vec{a_{B1}}\|$ pour le point $M \simeq \frac{1}{4H^2}$.

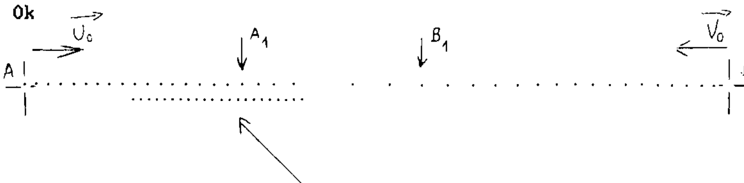
Sur la photo 2, pour le point M également $\|\vec{a_{B2}}\| = \frac{2}{4H^2}$

Donc $\frac{\|\vec{a_{B2}}\|}{\|\vec{a_{B1}}\|} \simeq 2$. Or $\frac{k_2}{k_1} \simeq 1{,}9$.

On ne pourra guère dépasser trois mesures dans chaque cas si l'on veut avoir une précision acceptable. Faire varrier éventuellement les vitesses initiales et le pas d'incrémentation H.

Document 2

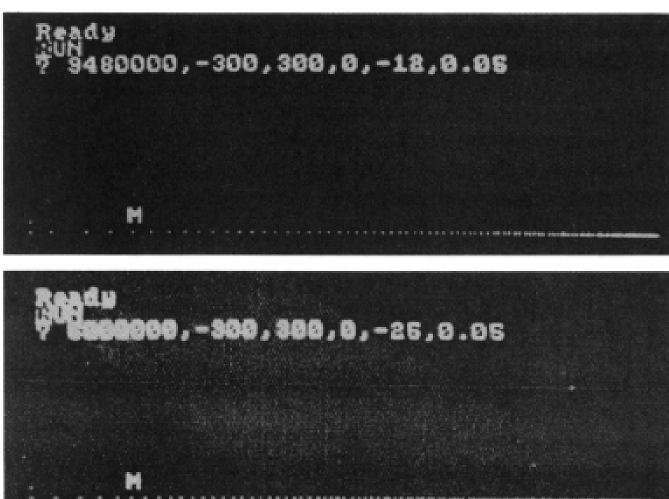
```
Ok
run
? 5.5,30,550,0.09,-0.1,100
Ok
```



Les deux particules dont le rapport des masses n'est que de quelques unités, «foncent» l'une vers l'autre.

La vitesse initiale de la particule A est $\vec{U_0}$, celle de B est $\vec{V_0}$.

Les positions initiales sont repérées par des croix.



Photos prises sur Amstrad. Le centre d'inertie de l'ensemble est au-dessus de la trajectoire de B et le point M toujours à la même distance de A.

On pourra procéder également à une étude prévisionnelle concernant la vitesse de l'une des particules du système isolé, si l'on connaît k et la vitesse de l'autre particule de telle sorte que le centre d'inertie de l'ensemble reste immobile soit $k \vec{v_A} + \vec{v_B} = \vec{0}$.

Les élèves réfléchissent, fournissent eux mêmes les valeurs numériques... puis c'est le verdict !

4. CONCLUSION

L'outil informatique est trop souvent inemployé - de manière rationnelle - alors qu'un nombre de plus en plus important d'élèves possèdent un mico-ordinateur et disposent souvent des bases nécessaires à la programmation acquises en dehors de cours d'Informatique (clubs, revues, etc..). Il convient de prendre en compte cette réalité et l'exploiter au mieux, c'est d'ailleurs ce qu'attendent et souhaitent les élèves.

Rappelons qu'un programme présentant toujours la même ossature permet l'étude d'un certain nombre de points de Physique, des trajectoires képlériennes aux spectres électriques ou magnétiques... et qu'une fois le «noyau» dur assimilé, on peut souvent l'enrichir.

Les programmes, qui ne comportent qu'un nombres limité d'instructions, seront rentrés au clavier ou sauvegardés sur disquettes. On peut aussi distribuer ces programmes sur nano-réseau.

La méthode de travail employée est active et gratuite (pas besoin de logiciels), seule la mise au point du programme nécessite un peu de temps. Les élèves ne sont plus alors de simples exécutants - un constant effort de réflexion leur est demandé tant au niveau de la conception du programme (exemple : réinvestissement intéressant au sujet de la dérivée etc...) qu'à celui de son exécution.

Enfin - et ce n'est pas négligeable - la nécessaire étude physique du phénomène envisagé précédant l'élaboration du programme, s'en trouve systématiquement réhaussée.