

Analogie oscillateur électronique-laser

par René FARCY
Rabat - MAROC

Plan de l'article

Introduction

1. Objectifs des oscillateurs quasi-sinusoïdaux
2. Aspect linéaire de l'oscillateur
 - 2.1. Principe
 - 2.2. Condition d'oscillation
 - 2.3. Exemple de réalisation d'un oscillateur électronique
 - a) Schéma idéalisé
 - b) Schéma réel
 - c) Réalisation pratique
 - 2.4. Exemple de réalisation d'un oscillateur optique
 - a) Fonction de transfert $G(\omega)$ du milieu amplificateur
 - α) Fonction idéalisée
 - β) Fonction réelle
 - b) Fonction de transfert $B(\omega)$ de la cavité résonnante
 - α) Fonction idéalisée
 - β) Fonction réelle
 - c) Réalisation de la condition $B(\omega)G(\omega) = 1$
 - 2.5. Insuffisance de l'aspect linéaire
3. Aspect non linéaire
 - 3.1. Stabilisation de l'oscillation par une non linéarité
 - 3.2. Nature du signal de sortie
 - a) Cas de l'oscillateur électronique
 - b) Cas de l'oscillateur optique

Appendice n° 1 : Comportement d'une sinusoïde tronquée

Appendice n° 2 : Détermination quantitative de l'allure du signal de sortie de l'oscillateur à Pont de Wien.

Bibliographie

INTRODUCTION

Le principe des oscillateurs quasi sinusoïdaux en électronique (oscillateur à Pont de Wien, à Quartz, Colpitts...) et en optique (Laser) présente de nombreux points communs. L'étude qui suit développe ces similitudes sur les deux exemples les plus courants : l'oscillateur à Pont de Wien et le Laser He-Ne.

Elle aboutit à la détermination du signal de sortie de l'oscillateur électronique («sinusoïde déformée»), et au spectre de la lumière émise par le Laser He-Ne.

1. OBJECTIF DES OSCILLATEURS QUASI-SINUSOÏDAUX

Il s'agit de créer un signal électrique ou lumineux d'une certaine amplitude et d'une certaine fréquence. Le signal de départ utilisé à cette fin sera un signal de bruit.

Le signal électrique (oscillateur électronique) sera caractérisé par une tension $V = V_0 \sin \omega t$. V_0 valant quelques volts, la fréquence ($f = \omega/2\pi$) pouvant aller de quelques Hz à plusieurs MHz suivant la solution retenue.

Le signal lumineux (oscillateur optique) sera caractérisé par un champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$, \vec{E} étant perpendiculaire à la direction de propagation du signal. \vec{E}_0 peut valoir de quelques centaines de V/M pour un laser à gaz fonctionnant de manière continue ; à plusieurs millions de V/M pour un laser de puissance fonctionnant en régime impulsif. La fréquence obtenue se situant entre 10^{12} Hz (infrarouge lointain) et $3 \cdot 10^{15}$ Hz (ultraviolet). Les procédés permettant d'obtenir des fréquences plus élevées (rayons X) ne sont actuellement pas opérationnels.

2. ASPECT LINÉAIRE DE L'OSCILLATEUR

2.1. Principe

Dans les deux cas le système est bouclé. Le signal sortant de l'amplificateur y est réinjecté par l'intermédiaire du réseau déphaseur ou de la cavité résonnante.

2.2. Condition d'oscillation

Tout signal (sous des conditions mathématiques peu restrictives), peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux. Dans tout système linéaire, le théorème de superposition est applicable. L'étude sera

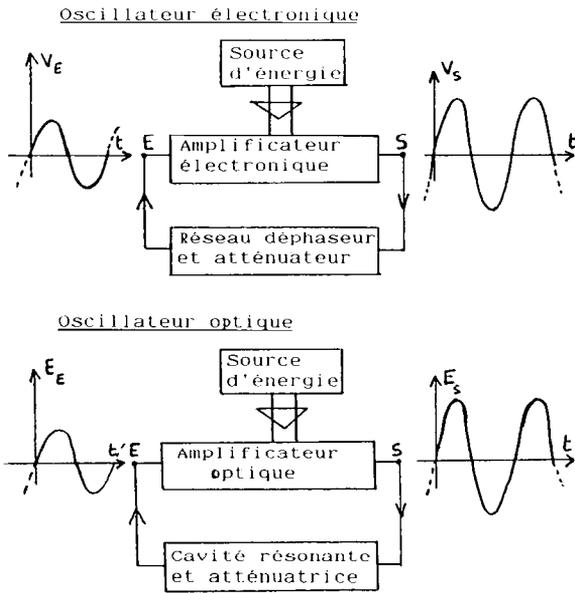


Figure 1

faite pour un signal sinusoïdal pur. Le comportement du système pour d'autres signaux s'obtiendra en superposant les réponses à chaque composante sinusoïdale du signal.

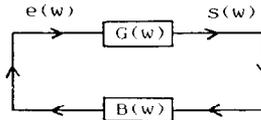


Figure 2

ω : pulsation du signal

$G(\omega)$: fonction de transfert de l'amplificateur

$B(\omega)$: fonction de transfert de l'atténuateur

Les grandeurs $e(\omega)$, $s(\omega)$, $G(\omega)$, $B(\omega)$ sont complexes.

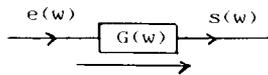


Figure 3

L'amplificateur isolé est un système unidirectionnel : $e(\omega)$ impose $s(\omega)$, mais $s(\omega)$ ne peut pas agir sur $e(\omega)$.

La condition d'oscillation s'écrit :

$$\begin{cases} s(\omega) = G(\omega)e(\omega) \\ e(\omega) = B(\omega)s(\omega) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{s(\omega) (1 - G(\omega)B(\omega)) = 0}$$

- Si $G(\omega)B(\omega) \neq 1$ alors $s(\omega) = 0$
- S'il existe ω_1 tel que $G(\omega_1)B(\omega_1) = 1$, le système peut avoir un signal de sortie $s(\omega_1)$ non nul.

2.3. Exemple de réalisation d'un oscillateur électronique (à pont de Wien)

a) Schéma idéalisé

$$G(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)} = \mu \text{ réel}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{3 + j \left(Rc\omega - \frac{1}{Rc\omega} \right)}$$

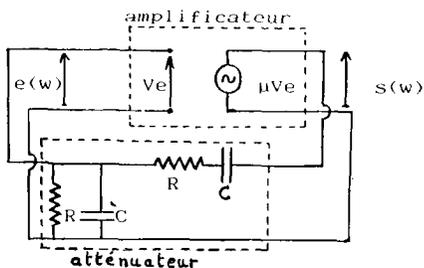


Figure 4a

L'échelle des pulsations est logarithmique dans les graphes.

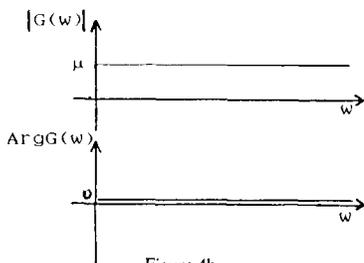


Figure 4b

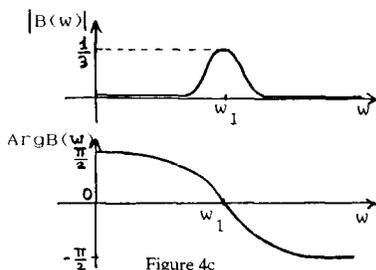


Figure 4c

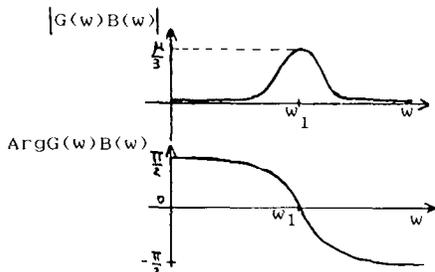


Figure 4d

La condition d'oscillation $B(\omega)G(\omega) = 1$ s'écrit :

$$\begin{cases} |G(\omega)B(\omega)| = 1 \\ \text{Arg}G(\omega) + \text{Arg}B(\omega) = 0(2\pi) \end{cases} \quad \text{Soit ici } \mu = 3 \text{ et } \omega_1 = \frac{1}{RC}$$

b) Schéma réel

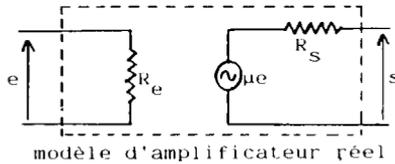


Figure 5

L'amplificateur utilisé pour ce type d'oscillateur à une fréquence de quelques KHz se modélise suivant le schéma de la figure 5. En insérant ce nouveau modèle dans le schéma de la figure 4 et en reprenant le calcul de $B(\omega)$ et de $G(\omega)$ il est facile d'obtenir :

$$B(\omega) = \frac{1}{3 + \frac{R}{R_e} + j \left[RC\omega - \frac{1}{C\omega} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_e} \right) \right]}$$

$$G(\omega) = \mu \frac{3 + \frac{R}{R_e} + j \left[RC\omega - \frac{1}{C\omega} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_e} \right) \right]}{3 + \frac{R}{R_e} + R_s \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_e} \right) + j \left[C\omega (R_s + R) - \frac{1}{C\omega} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_e} \right) \right]}$$

Il apparaît que dans le cas d'un amplificateur non parfait (R_e non infini, R_s non nul), $B(\omega)$ (ainsi que $G(\omega)$) dépendent à la fois des caractéristiques de l'amplificateur et de l'atténuateur.

La détermination de ω_1 se fait toujours à partir de la relation :

$$\text{Arg } G(\omega_1) + \text{Arg } B(\omega_1) = 0(2\pi)$$

μ se détermine par $B(\omega_1)G(\omega_1) = 1$

$G(\omega_1)$ n'étant plus réel, il y a un déphasage entre e et s .

c) Réalisation pratique

L'amplificateur peut se réaliser de la façon suivante :

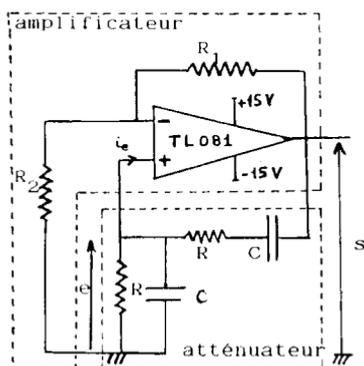


Figure 6

La source continue d'énergie (+15V, -15V) d'alimentation de l'amplificateur opérationnel est la source d'énergie de l'amplificateur représenté à la figure 1.

$$\text{Gain : } \mu = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Impédance d'entrée : $R_c = \frac{e}{i_c}$ est de l'ordre de $10^{11} \Omega$ pour le TL81.

Résistance de sortie : R_s est de l'ordre de $10^{-2} \Omega$ dans un tel schéma.

Dans le domaine de fréquence utilisé (quelques KHz), le schéma idéalisé est ici largement suffisant pour décrire le comportement du système, (c'est lui qui sera retenu dans la suite).

2.4. Exemple de réalisation d'un oscillateur optique (Laser He-Ne)

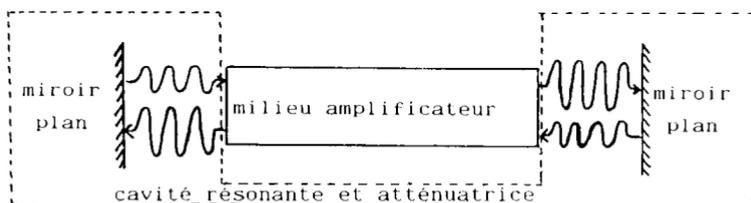


Figure 7

La cavité résonnante est constituée de deux miroirs plans. Elle réinjecte le signal dans le milieu amplificateur. Le signal réfléchi par les miroirs est d'amplitude plus faible à cause des pertes par réflexion sur les miroirs, et par diffraction sur eux.

Remarque préliminaire : Tout comme pour l'oscillateur électronique (dans le schéma réel), $B(\omega)$ et $G(\omega)$ dépendent à la fois de la structure de la cavité résonnante et du milieu amplificateur. Par exemple une cavité à miroirs plans ou sphériques



ne confineront pas les rayons lumineux de la même façon dans le milieu amplificateur, qui aura donc un comportement différent.

Par la suite le milieu amplificateur et la cavité seront étudiés séparément. Cette approche simplifiée est largement suffisante pour une première interprétation des caractéristiques du Laser.

a) Fonction de transfert $G(\omega)$ du milieu amplificateur

α) Fonction idéalisée

La grande majorité des milieux amplificateurs est réalisée sur la base de l'inversion de population d'un ensemble d'atomes possédant deux niveaux d'énergie possibles. (Ceci n'est pas obligatoire, le milieu amplificateur du laser à électrons libres est constitué d'un faisceau d'électrons de grande énergie se propageant dans un champ magnétique périodique).

★ Soit un photon incident d'énergie $h\nu_1 / h\nu_1 = E_2 - E_1$.

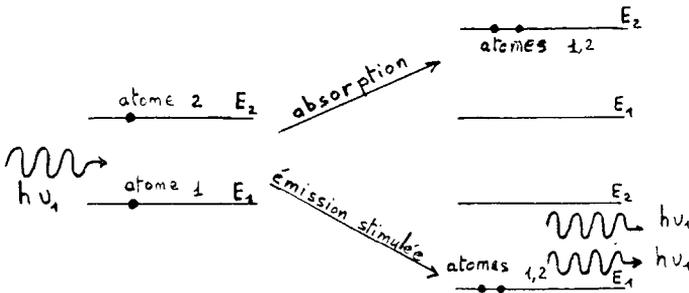


Figure 8

Il y a deux possibilités :

- absorption : l'atome 1 a absorbé le photon et se trouve au niveau E_2 .

La probabilité d'absorption par atome et par unité de temps est Bu , avec u densité spectrale de rayonnement ($\text{Jm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$) et B constante de proportionnalité.

Ceci signifie que plus il arrive de photons sur l'atome, plus l'absorption est probable.

– émission stimulée : l'atome 2 est passé au niveau E_1 en émettant un photon identique au photon incident, c'est-à-dire ayant même fréquence, même direction, même polarisation.

La probabilité d'absorption par atome et par seconde est également Bu .

Soit un ensemble d'atomes à 2 niveaux soumis à un rayonnement incident de fréquence ν_1 . Il apparaît que si le niveau E_1 est plus peuplé que le niveau E_2 alors l'absorption est plus probable que l'émission stimulée (et inversement).

★ Il existe un troisième phénomène, où un atome dans le niveau E_2 , passe spontanément au niveau E_1 en émettant un photon.

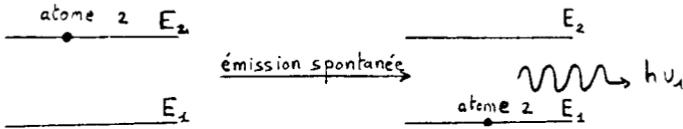


Figure 9

Chaque atome émettant de façon indépendante des autres, l'émission spontanée est isotrope et incohérente.

Le milieu amplificateur utilise le phénomène de l'émission stimulée.

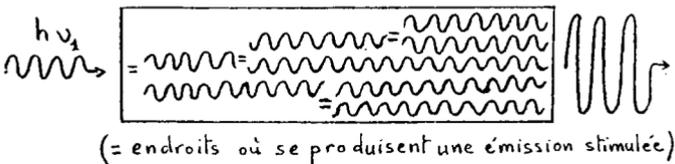


Figure 10

Tous les photons générés par émission stimulée tendent à renforcer l'amplitude de l'onde incidente.

Pendant les deux autres phénomènes : émission spontanée et absorption coexistent avec l'émission stimulée dans le milieu amplificateur. Il faut donc faire en sorte que le phénomène d'émission stimulée soit prépondérant.

A l'équilibre thermique on a d'après la loi de Boltzman :

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

N_2 : nombre d'atomes dans le niveau d'énergie E_2

N_1 : nombre d'atomes dans le niveau d'énergie E_1

pour $\lambda = 0.613 \mu\text{m}$ (longueur d'onde du laser He-Ne courant)

$$E_2 - E_1 = \frac{ch}{\lambda} \quad \text{ce qui donne } \frac{N_2}{N_1} = 10^{-31}$$

Tous les atomes étant quasiment dans le niveau E_1 , l'émission stimulée sera très défavorisée par rapport à l'absorption. Le milieu sera absorbant. Le rayonnement incident produira plus de transitions $E_1 \rightarrow E_2$ que $E_2 \rightarrow E_1$. On pourrait espérer réaliser de cette façon une inversion de population ($N_2 > N_1$), condition nécessaire pour que l'émission stimulée soit favorisée. Cependant dès que $N_1 = N_2$ (milieu transparent), absorption et émission stimulée sont équiprobables, il n'est donc pas possible d'obtenir une inversion de population dans un système à deux niveaux.

Le milieu amplificateur utilise un système à 3 ou 4 niveaux.

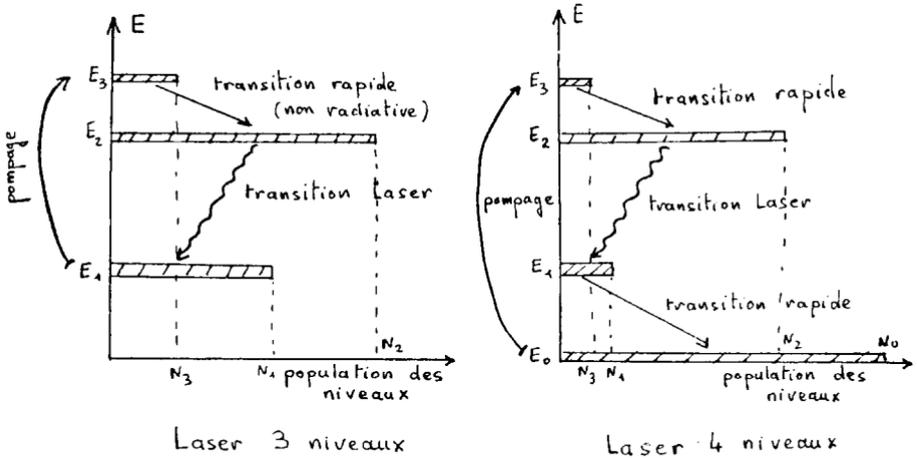


Figure 11

Le processus de pompage fait passer les atomes du niveau E_1 (ou E_0) au niveau E_3 . La transition $E_3 \rightarrow E_2$ étant rapide, E_3 est pratiquement dépeuplé (ainsi que E_1 dans le schéma à quatre niveaux). Dans le laser

à trois niveaux il faut d'abord pomper la moitié des atomes de E_1 pour commencer à avoir $N_2 > N_1$. Dans le système à 4 niveaux par contre, les premiers atomes pompés réalisent $N_2 > N_1$, (E_1 étant dépeuplé), d'où son avantage.

Reste à déterminer la place de l'émission spontanée dans ce processus.

Soit A la probabilité par atome et par unité de temps d'avoir une émission spontanée ; en partant de la loi de Boltzman et de la formule du rayonnement de Plank à l'équilibre thermodynamique, on obtient :

$$\frac{A}{Bu} = \frac{8\pi h}{\lambda^3 u}$$

$h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s : constante de Planck
 u : densité spectrale de rayonnement
 λ : longueur d'onde.

Pour que l'émission spontanée puisse être considérée comme un phénomène de bruit, il faut :

$$\frac{A}{Bu} \ll 1$$

Exemple numérique : Laser He-Ne

★ $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$

★ section utile du milieu amplificateur $s = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{m}^2$ (ce qui correspond à la section du faisceau émis)

★ puissance de la cavité Laser : $P = 5\text{W}$ (à distinguer de la puissance de sortie du faisceau qui sera bien plus faible).

★ largeur à mi-hauteur du spectre d'émission $\Delta\nu = 1500 \text{MHz}$ de façon immédiate, il vient $u = \frac{P}{sc \Delta\nu}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ d'où $\frac{A}{Bu} = 2,6 \cdot 10^{-3}$.

Dans cet exemple l'émission spontanée constitue un phénomène secondaire, qui sera laissé de côté dans la suite de l'étude. Plus λ est petit, plus la condition $\frac{A}{Bu} \ll 1$ est difficile à obtenir. Ceci ne va pas sans poser de problèmes pour la réalisation du laser dans le domaine de l'ultraviolet et des rayons X.

La fonction de transfert idéalisée $G(\omega)$ a l'allure suivante :



Figure 12

β) Fonction réelle

En réalité la raie à ω_1 est élargie par des nombreux phénomènes physiques :

★ Largeur naturelle

Conformément au principe d'incertitude d'Heisenberg, on a $\Delta E \tau \approx \hbar$ avec ΔE incertitude sur $(E_2 - E_1)$; τ durée de vie dans le niveau 2 d'où un élargissement $\Delta\omega_1 = 2\pi\Delta\nu = \frac{2\pi}{\tau}$

★ Effet de pression

Dans le cas où le milieu amplificateur est constitué par un gaz (c'est celui du laser He-Ne). L'agitation du gaz produit des chocs fréquents. Ce phénomène diminue la durée de vie τ du niveau E_2 , d'où un élargissement de la raie : $\Delta\nu = \frac{1}{\tau}$

★ Effet Doppler

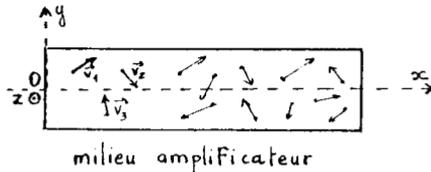


Figure 13

Soit un atome de vitesse v dans le référentiel fixe $(0, x, y, z)$. Soit ν_1 la fréquence d'émission de l'atome dans son référentiel propre, considérons les photons émis dans le voisinage de la direction (Ox) , (les autres sortent du système milieu amplificateur plus miroirs au bout de quelques allers-retours).

Un observateur lié au repère $(0, x, y, z)$ verra la fréquence :

$$\nu = \frac{\nu_1}{1 - \frac{v_x}{c}}$$

(effet Doppler) avec v_x composante suivant (Ox) de la vitesse de l'atome.

Les vitesses étant distribuées de façon isotrope suivant la loi de Maxwell-Boltzman :

$$dN = K \exp\left(\frac{-1}{2} m v_x^2 / kT\right) d v_x$$

T : température du milieu.

dN : nombre d'atomes de vitesse comprise entre v_x et $v_x + dv_x$.

m : masse de l'atome.

k : constante de Boltzman.

K : constante de normalisation telle que $\int dN = N_{\text{total}}$

La largeur de la raie Doppler se déduit facilement des considérations précédentes :

$$\Delta \omega_d = \frac{4 \pi v_l}{c} \sqrt{\frac{2 kT}{m} \text{Ln}2}$$

Pour le laser He-Ne, l'effet Doppler est la principale cause d'élargissement de la raie, qui masque les autres effets décrits antérieurement ; d'où l'allure de $G(\omega)$.

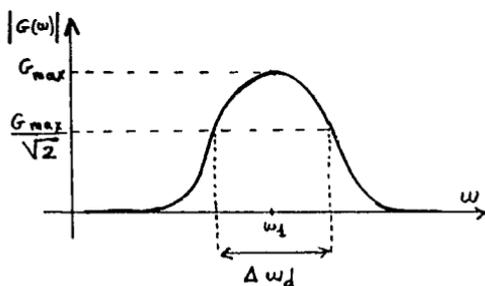


Figure 14

G_{max} correspond à une seule traversée du milieu amplificateur.

γ) Réalisation pratique

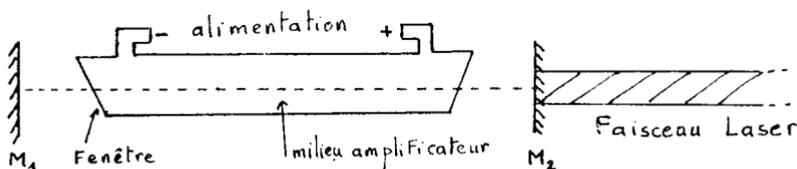


Figure 15

Le milieu amplificateur contient un mélange d'hélium (85 %) et de Néon (15 %) sous basse pression. Le milieu actif est constitué par le Néon. L'hélium sert à réaliser l'inversion de population du Néon (pompage). Des décharges électriques envoyées dans le gaz amènent les atomes d'hélium dans les états métastables 2^3s_1 , 2^1s_0 . Ces deux états étant énergétiquement voisins de $2s$, $3s$ du Néon, il y a une forte probabilité de transfert d'excitation par collisions entre les atomes He et Ne. (cf figure 16).

La source d'énergie du milieu amplificateur est l'alimentation électrique du processus de pompage.

La cavité résonnante est constituée par les deux miroirs M_1 et M_2 . M_2 a un coefficient de transmission en amplitude t_2 . La partie du rayonnement qui sort de M_2 constitue le faisceau utile.

Les fenêtres de sortie du milieu amplificateur sont inclinées suivant l'angle de Brewster. L'inclinaison de Brewster supprime la réflexion pour une polarisation déterminée, l'onde ayant cette polarisation peut donc traverser la fenêtre sans pertes.

Le faisceau lumineux est donc polarisé.

Actuellement les miroirs sont scellés, directement en contact avec le milieu amplificateur, la lumière fournie est non polarisée.

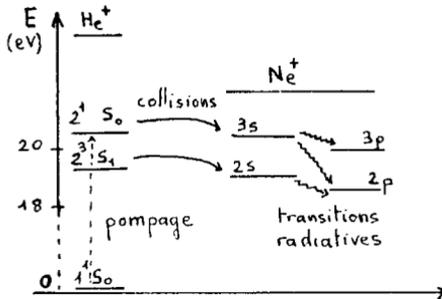


Figure 16

Il y a plusieurs raies possibles $3s$, $3p$, $2s$, $2p$; $3s$, $2p$. Celle utilisée dans le modèle courant (raie rouge) est la transition $3s$, $2p$.

$$\lambda_1 = 0,6328 \mu\text{m}$$

Les atomes de Néon ayant une masse molaire de 20 g, la température du système étant aux alentours de 120°C , l'application numérique avec $\lambda_1 = 0,6328 \mu\text{m}$ donne $\Delta\nu_{\text{Doppler}} = 1500 \text{ MHz}$.

b) Fonction de transfert $B(\omega)$ de la cavité résonnante

$\alpha)$ Fonction idéalisée

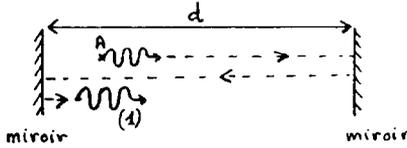


Figure 17

Supposons qu'en A soit émise une onde de fréquence ν suivant l'axe de la cavité.

Après un aller-retour dans la cavité, l'onde (1) va interférer avec l'onde émise en A. Deux cas se présentent :

★ Les interférences sont destructives ou partiellement destructives, la superposition de l'onde issue de la source et des ondes réfléchies donnera une onde d'amplitude nulle au bout d'un certain nombre d'aller-retour.

★ Les interférences sont constructives (après un aller-retour de l'onde dans la cavité, l'onde est en phase avec celle issue de la source).

condition : $2d = k\lambda = k\frac{c}{\nu}$, $k\epsilon Z$

Remarque :

Le passage dans $B(\omega)$ d'une onde sinusoïdale pure (c'est-à-dire d'amplitude constante, de période fixe et d'extension temporelle infinie) correspond à une infinité d'aller-retour de l'onde dans la cavité.

Si les miroirs sont parfaits et d'étendue infinie on a $B(\omega) = 1$ pour :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{2d}{k} \quad \text{soit} \quad \omega = \frac{k\pi c}{d} \quad \text{avec} \quad k\epsilon Z$$

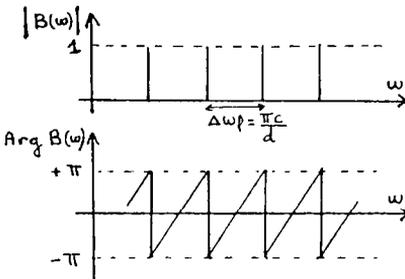


Figure 18

La cavité se comporte comme un filtre laissant passer une série de fréquences espacées de :

$$\frac{\Delta\omega_\ell}{2\pi} = \Delta\nu_\ell = \frac{c}{2d}$$

$\Delta\nu_\ell$ est appelé intervalle spectral libre ($d=20$ cm pour un laser He-Ne courant d'où $\Delta\nu_\ell = 750$ MHz).

β) Fonction réelle

Comme tout filtre, la cavité n'est pas parfaite, soit Q son facteur de qualité.

$$Q = 2\pi \frac{\text{Énergie stockée dans la cavité}}{\text{Énergie perdue par période}}$$

La période à considérer est celle du signal $T_{\text{signal}} = \frac{2\pi}{\omega}$

Les défauts du filtre sont dûs principalement à 3 facteurs :

- pertes par réflexion sur les miroirs
Soit R_1 coefficient de réflexion énergétique du 1^{er} miroir.
Soit R_2 coefficient de réflexion énergétique du 2^e miroir.

- pertes dues à la sortie du faisceau utile de la cavité.
Le faisceau sortant par le miroir M_2 (cf figure 15), la perte est comptabilisée dans le coefficient R_2 , qui sera sensiblement inférieur à R_1 .

- pertes par diffraction.
Soit D pertes par passage dues à la diffraction.
Énergie perdue pendant un aller-retour dans la cavité :

$$E_{\text{stockée}} [1 - R_1 R_2 (1 - D)^2]$$

Durée de l'aller-retour $\frac{2L}{c}$

Si on suppose que toute se passe comme si la perte d'énergie se faisait de manière continue dans la cavité.

$$Q = 2\pi \frac{E_{\text{stockée}}}{E_{\text{stockée}} [1 - R_1 R_2 (1 - D)^2]} \frac{T_{\text{signal}}}{T_{\text{aller-retour}}} = \frac{2\pi}{T_{\text{signal}}} \frac{2L}{c [1 - R_1 R_2 (1 - D)^2]}$$

Numériquement cette expression donne une valeur de Q allant de 10^8 à 10^9 .

D'autre part $Q = \frac{\omega}{\Delta\omega_c}$; pour $\nu_1 = 4,74.10^{14}$ Hz (fréquence de la raie $0,63 \mu\text{m}$), on obtient donc $\Delta\nu_c = \frac{\Delta\omega_c}{2\pi} = 1$ MHz, d'où l'allure de $|B(\omega)|$.

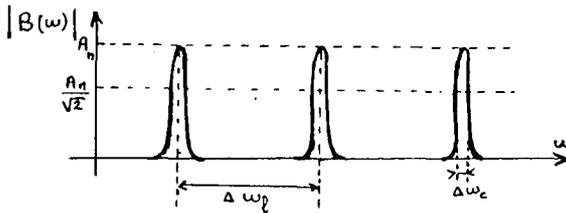


Figure 19

$$\Delta V_c = \frac{\Delta \omega_c}{2\pi} \# 1 \text{ MHz.}$$

$$\frac{\Delta \omega_l}{\Delta \omega_c} \# 750$$

$$\Delta V = \frac{\Delta \omega_l}{2\pi} \# 750 \text{ MHz.}$$

On va considérer que le passage d'une onde sinusoïdale dans la cavité correspond à n aller-retour dans celle-ci (Voir appendice n° 1 pour la validité de cette approximation suivant les valeurs de n).

$A_n < 1$ coefficient d'atténuation correspondant à ces n aller-retour. Considérer n infini donnerait $A = 0$, car à chaque passage l'amplitude de l'onde diminue.

c) Réalisation de la condition $G(\omega).B(\omega) = 1$

Il est indispensable pour tracer l'allure de $B(\omega).G(\omega)$ de disposer des ordres de grandeur de la largeur de la raie Doppler, de l'intervalle spectral libre et de la largeur de la raie cavité. Ceux-ci varient beaucoup d'un type de laser à l'autre ; dans le cas présent (Laser He-Ne modèle courant) : $\Delta\nu_d \# 1500$ MHz, $\Delta\nu_l \# 750$ MHz, $\Delta\nu_c \# 1$ MHz.

$G_{n \text{ max}}$: gain correspondant à $2n$ passages dans le milieu amplificateur.

★ ω_1 est choisi tel que $2d = k\lambda_1$ pour la représentation de $G(\omega)B(\omega)$. Cette condition ne peut pas être réalisée en pratique de façon stable. En effet la longueur de la cavité varie (fluctuations thermiques). Ces variations de longueur sont de l'ordre de grandeur de λ_1 . La raie centrale cavité se déplace donc au cours du temps à l'intérieur de la raie Doppler.

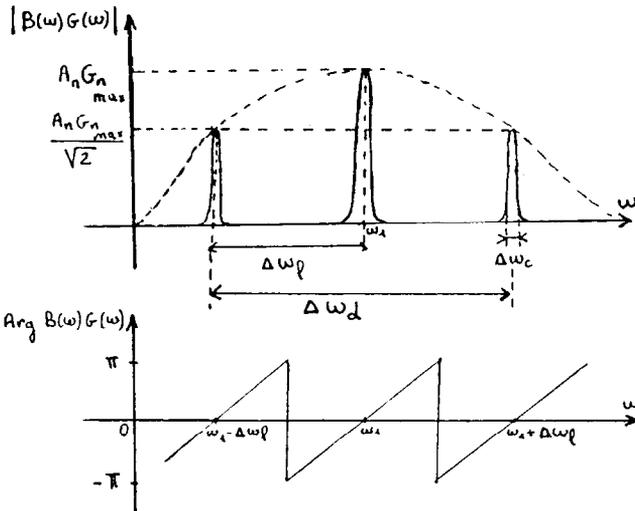


Figure 20

★ La condition $\text{Arg } B(\omega)G(\omega) = 0(2\pi)$ est vérifiée pour $\omega_1 + k\Delta\omega_l$; $k \in \mathbb{Z}$, ces valeurs sont appelées modes longitudinaux du laser.

Reste à étudier la condition $|B(\omega)G(\omega)| = 1$.

Suivant les valeurs de $G_{n \text{ max}}$ on peut avoir plusieurs solutions : la condition $A_n G_{n \text{ max}} = 1$ signifie que le gain du milieu amplificateur compense les pertes de la cavité pour le mode longitudinal ω_1 .

La condition d'oscillation ne peut cependant pas être traitée de façon correcte par une méthode linéaire.

2.5. Insuffisance de l'aspect linéaire

L'étude linéaire donne comme condition d'oscillation :

$$s(\omega)(1 - B(\omega)G(\omega)) = 0$$

Dans le cas où il existe $\omega_1/G(\omega_1)B(\omega_1) = 1$, l'oscillateur pourrait s'amorcer grâce à un signal de bruit.

★ Pour l'oscillateur électronique

Le signal de bruit pourra être par exemple un bruit thermique. L'agitation thermique des particules chargées constituant la matière d'une

résistance entraîne à l'échelle macroscopique des fluctuations erratiques de tension autour de la valeur moyenne. De telles fluctuations contiennent des fréquences allant de zéro à la centaine de GHz.

★ Pour l'oscillateur optique

Les fréquences susceptibles d'être amplifiées sont telles que $h\nu_1 = E_2 - E_1$; le photon initiateur pourra provenir d'une émission spontanée.

Exemple : $G(\omega_1) = 2$

$$B(\omega_1) = \frac{1}{2}$$

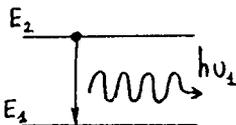


Figure 21

Supposons que la condition $G(\omega_1)B(\omega_1) = 1$ soit pratiquement réalisée.

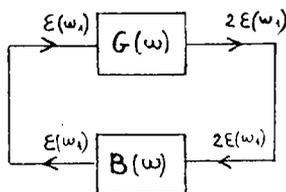


Figure 22

ϵ amplitude du signal de bruit à la pulsation ω_1 .

Supposons que le signal de bruit apparaisse par exemple à l'entrée de l'amplificateur. En sortie on aura 2ϵ qui reste de l'ordre de grandeur d'un signal de bruit, ce qui ne présente pas d'intérêt.

Remarque : Dans les 2 cas (optique et électronique) l'évolution du système se fait par passages successifs dans la boucle.

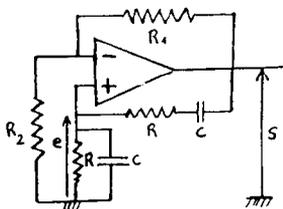


Figure 23

L'amplificateur opérationnel étant unidirectionnel e influence s , mais s ne peut influencer e qu'en passant par le réseau déphaseur R-C.

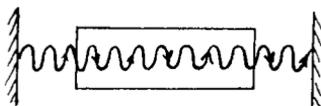


Figure 24

L'évolution du système étant liée à la propagation de la lumière, l'unidirectionnalité est évidente.

En fait il est impossible d'obtenir de façon stable la condition $G(\omega_1)B(\omega_1) = 1$ avec une précision infinie.

Supposons $G(\omega_1)B(\omega_1)$ très légèrement supérieur à 1.

Exemple : $G(\omega_1) = 2,001$

$$B(\omega_1) = \frac{1}{2}$$

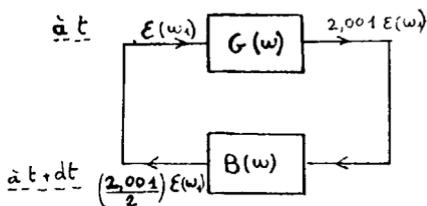


Figure 25

A chaque tour effectué dans la boucle le signal croît de $\frac{2,001}{2}$, la «durée» d'un tel tour étant de l'ordre de la milliseconde pour l'oscillateur électronique étudié, et de l'ordre de la nanoseconde pour le laser, le signal de sortie tendra rapidement vers l'infini, ce qui n'a pas de sens physique.

Le calcul de la «durée» des tours est effectué à l'appendice 1 (§ 2.2.).

Supposons $B(\omega_1)G(\omega_1)$ très légèrement inférieur à 1. De la même façon après un certain nombre de passages dans la boucle, le signal de sortie finira par avoir une amplitude quasi nulle.

L'étude linéaire ne permet donc pas d'expliquer le fonctionnement d'un tel système.

Reste à préciser ce que représente «un tour» dans la boucle dans une représentation fréquentielle. (cf Appendice n° 1 § 2.).

3. ASPECT NON LINÉAIRE

3.1. Stabilisation de l'oscillation par une non linéarité

La fonction de transfert $G(\omega)$ de l'amplificateur n'est pas linéaire ce qui signifie que $G(\omega)$ dépend aussi de l'amplitude du signal d'entrée, d'où $G(\omega, e)$.

★ Pour l'oscillateur électronique

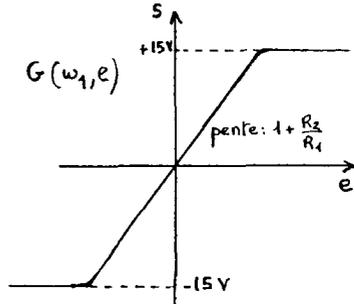


Figure 26

La limitation de s à ± 15 V provient de la tension continue d'alimentation à ± 15 V de l'amplificateur opérationnel.

★ Pour l'oscillateur optique

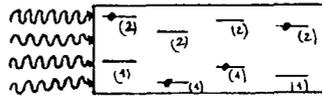


Figure 27

Plus le nombre de photons incidents sera grand, plus le niveau E_2 sera dépeuplé par émission stimulée. A partir d'une certaine intensité du rayonnement incident, le processus de pompage n'arrivera plus à créer une situation où $N_2 > N_1$ (inversion de population).

Lorsque la situation où $N_2 = N_1$ est atteinte, l'émission stimulée compense juste l'absorption. C'est la saturation, le gain tend vers 1.

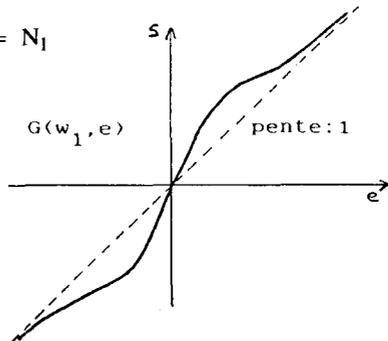


Figure 28

★ **Fonction $G(\omega_1, e)B(\omega_1, e)$**

Dans les deux cas $B(\omega)$ peut être considéré comme linéaire, $B(\omega)$ ne dépendant que de composants passifs linéaires : résistances, capacités, miroirs. L'allure de $G(\omega_1, e)B(\omega_1, e)$ est donc la suivante :

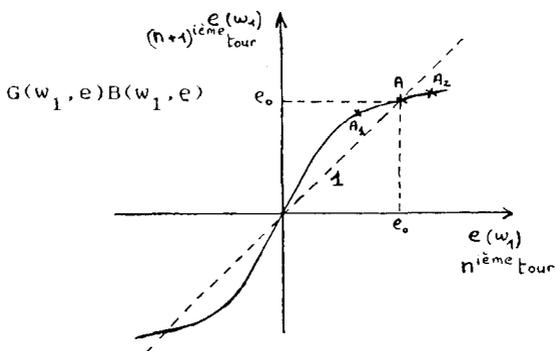


Figure 29

L'allure de cette courbe diffère un peu pour les deux types d'oscillateurs, mais les caractéristiques essentielles sont les mêmes, c'est-à-dire $|G(\omega_1, e)B(\omega_1, e)| > 1$ pour e faible, et à partir d'une certaine valeur de e on a $|G(\omega_1, e)B(\omega_1, e)| < 1$.

Pour qu'il y ait amorçage des oscillations il faut avoir $|G(\omega_1, e)B(\omega_1, e)|$ supérieur à 1 pour e d'amplitude faible. Ainsi le signal de bruit de faible amplitude après quelques tours dans la boucle s'amplifie.

Pour que l'amplitude du signal de sortie reste finie il faut avoir $|G(\omega_1, e)B(\omega_1, e)| < 1$ à partir d'une certaine amplitude de e . Montrons que A est un point de fonctionnement stable. Soit A tel que :

$$G(\omega_1, e)B(\omega_1, e) = 1 ;$$

– si suite à une perturbation le point de fonctionnement vient en

$$A_1 \text{ le gain } \frac{e(\omega_1) \text{ (n}^{\text{ième}} + 1) \text{ tour}}{e(\omega_1) \text{ (n}^{\text{ième}}) \text{ tour}} \text{ devient supérieur à 1 donc } e(\omega_1)$$

croît jusqu'à e_0 . Le point de fonctionnement revient en A.

– de même si le point de fonctionnement vient en A_2 , on a alors :

$$\frac{e(\omega_1) \text{ (n}^{\text{ième}} + 1) \text{ tour}}{e(\omega_1) \text{ (n}^{\text{ième}}) \text{ tour}} < 1$$

après quelques passages dans la boucle $e(\omega_1)$ décroît jusqu'à e_0 .

3.2. Nature du signal de sortie

a) Cas de l'oscillateur électronique

Le signal de sortie aura pour amplitude e_0 , il ne sera pas sinusoïdal, la caractéristique $|G(\omega_1, e)B(\omega_1, e)|$ tendant à rendre la pente de la sinusoïde plus raide aux faibles amplitudes et à aplatir les sommets.

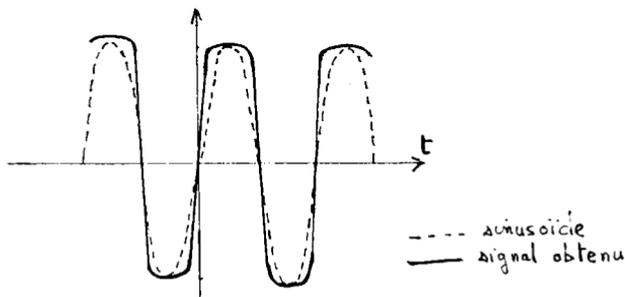


Figure 30

Il faut éviter de continuer dans cette voie, car la sinusoïde déformée contient des harmoniques de ω_1 , donc qui doivent être étudiées par $G(n\omega_1, e)B(n\omega_1, e)$. Le système n'étant pas linéaire les réponses à ω_1 et à $n\omega_1$ ne sont pas superposables. Pour déterminer l'allure du signal de sortie de façon rigoureuse, il est nécessaire de revenir à une étude temporelle. (Pour cela cf. appendice n° 2 où un cas particulier simple est traité).

On peut toujours remarquer que plus la non linéarité sera douce plus le signal se rapprochera d'une sinusoïde.

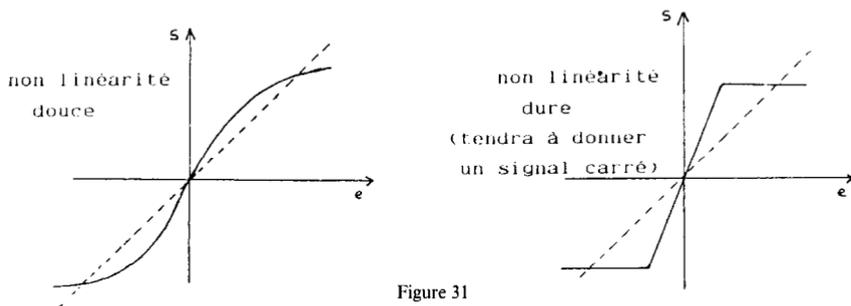


Figure 31

A partir du moment où les effets non linéaires sont indispensables pour obtenir la stabilité de l'oscillation, le signal obtenu ne pourra être purement sinusoïdal. Ceci justifie l'appellation «oscillateurs quasisinusoïdaux».

b) Cas de l'oscillateur optique

★ **Accrochage, possibilité d'oscillation multimodes**

Lors de l'étude linéaire, l'allure de la fonction $|B(\omega)G(\omega)|$ a été déterminée (cf. figure 20). D'après la remarque faite au 2.4 c), l'allure de $|B(\omega)G(\omega)|$ représentée à la figure 32 est plus générale. La position des modes se déplaçant plus ou moins vite au cours du temps selon le degré de stabilité de la longueur de la cavité.

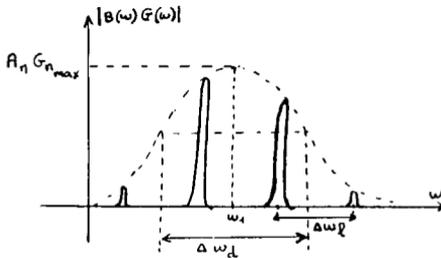


Figure 32

Lorsque l'amplitude e du signal lumineux est faible, la courbe $G(\omega, e)$ de la figure 28 peut être assimilée à une droite. La condition d'amorçage (ou d'accrochage) peut donc s'écrire $|B(\omega)G(\omega)|_{\text{linéaire}} > 1$.

D'autre part, plus la puissance de pompage est élevée, plus l'inversion de population sera grande et donc le gain $G_n \text{ max}$ élevé (cf. figure 33). L'intervalle $[\omega_a, \omega_b]$ est appelé plage d'accrochage, il dépend du taux de pompage $[\omega_{am}, \omega_{bm}] < [\omega_{af}, \omega_{bf}]$.

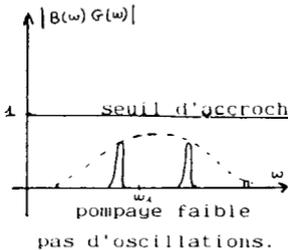


Fig 33a

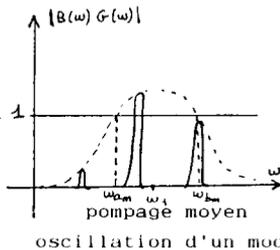


Fig 33b

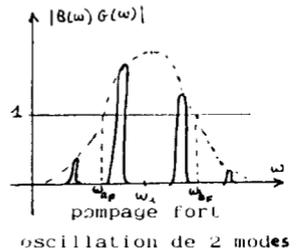


Fig 33c

Figure 33

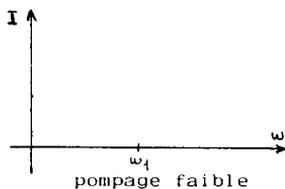


Fig. 34a

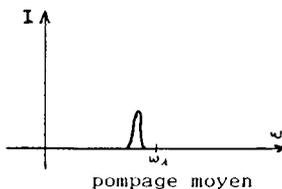


Fig. 34b

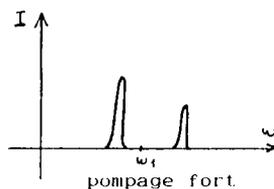


Fig. 34c

Les spectres d'émission ont donc l'allure suivante (cf. figure 34) en faisant abstraction des effets non linéaires. Il est important de remarquer que l'émission laser ne se fait pas forcément à la pulsation ω_1 mais à une pulsation voisine.

Dans certains lasers (notamment le Laser He-Ne courant) on considère que la largeur du spectre émis correspond à $[\omega_a, \omega_b]$ les raies balayant toute la plage au cours du temps.

★ Stabilisation de l'oscillation

Plaçons nous pour simplifier dans le cas d'une oscillation monomode figure 33b et 34b.

Il a été vu que la stabilisation n'est possible que si $G(\omega, e)$ est non linéaire. La condition s'écrira donc $B(\omega)G(\omega, e) = 1$, ce que signifie : gain saturé \times pertes dans la cavité = 1.

Il est facile de montrer (à partir d'un schéma de Laser à 3 ou 4 niveaux) que le gain du milieu amplificateur est de la forme :

$$G(\omega, e) = \frac{G_{\text{linéaire}}(\omega)}{1 + \frac{I}{I_s}} \quad \text{avec } I = |e|^2 : \text{intensité}$$

d'où la valeur de I à laquelle l'oscillation se stabilise.

Dans le cas d'une oscillation multimodale, les effets non linéaires ne permettent pas d'étudier les modes séparément (le théorème de superposition n'est plus valable).

4. CONCLUSION

Nous sommes en présence de deux oscillateurs dont le principe est identique, mais dont les solutions technologiques diffèrent :

L'une (électronique) correspondant à des longueurs d'ondes de l'ordre de plusieurs milliers de mètres, avec un rapport dimension du dispositif sur longueur d'onde émise d'environ 10^{-7} .

L'autre optique ayant des longueurs d'onde de l'ordre du milliardième de mètre avec un rapport dimension sur longueur d'onde supérieur à 10^5 .

Les perspectives encore lointaines d'oscillateurs à longueurs d'ondes beaucoup plus courtes de l'ordre de 10^{-9} m (Laser à rayons X mous), 10^{-14} m (Graser) laissent entrevoir, toujours sur le même principe de base, des solutions technologiques radicalement différentes de celles présentées ici de manière succincte.

Appendice n° 1

Comportement d'une sinusoïde tronquée

1. CAS GÉNÉRAL

Un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 sera représenté sous la forme complexe $a(t) = a_0 e^{j\omega_0 t}$. Ne figureront donc sur les schémas que les parties positives du spectre.

Soit $H(\omega)$ la fonction de transfert complexe d'un système linéaire.

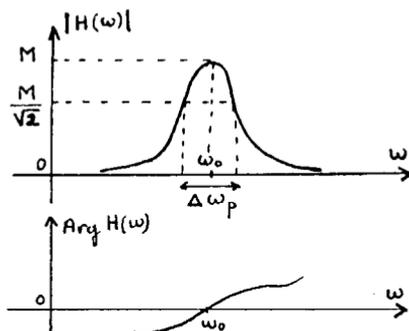


Figure 35

Soit $e(t) = e_0 e^{j\omega_0 t}$ signal sinusoïdal pur à l'entrée de $H(\omega)$. C'est un signal non limité dans le temps, t variant de $-\infty$ à $+\infty$. La sortie sera $s(t) = |H(\omega_0)| e_0 e^{j(\omega_0 t + \text{Arg } H(\omega_0))} = M e_0 e^{j\omega_0 t}$.

Cependant tous les signaux dits sinusoïdaux utilisés en pratique sont limités dans le temps.

Il va s'agir de déterminer dans quelle mesure une sinusoïde tronquée de pulsation ω_0 voit son amplitude multipliée par M en passant par $H(\omega)$.

Soit $e_\tau(t)$ la sinusoïde limitée à $t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$

$e_\tau(\omega)$ son spectre. Soit F transformée de Fourier :

$$e_\tau(\omega) = F[e_\tau(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e_\tau(t) e^{-j\omega t} dt = \tau e_0 \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}$$

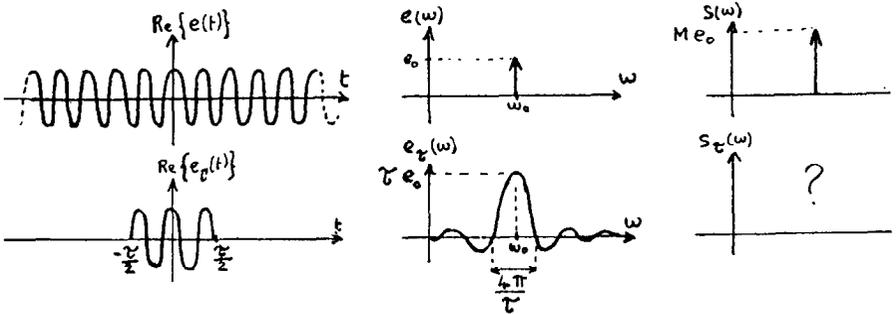


Figure 36

★ 1^{er} cas

$$\frac{1}{\tau} \ll \Delta\omega_p$$

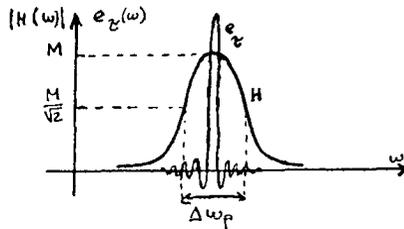


Figure 37

Le spectre $e_\tau(\omega)$ est en quasi-totalité contenu dans la bande passante de $H(\omega)$, et en particulier dans la zone où $|H(\omega)|$ est proche de M .

d'où

$$|S_\tau(\omega)| = M|e_\tau(\omega)|.$$

★ 2^e cas

$$\frac{1}{\tau} \gg \Delta\omega_p$$

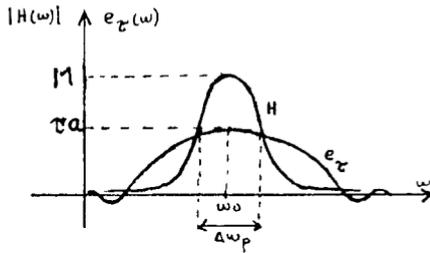


Figure 38

Il n'y a qu'une certaine partie du spectre de $e_\tau(\omega)$ qui est comprise dans la bande passante de $H(\omega)$.

L'énergie du signal de sortie sera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega) e_\tau(\omega)|^2 d\omega$$

Soit approximativement $\Delta\omega_p(M\tau a)^2$: en considérant $e_\tau(\omega)$ sensiblement constant et $|H(j\omega)| = M$, à l'intérieur de la bande passante, le gain en puissance du signal sera :

$$G_p = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |e_\tau(\omega)|^2 d\omega}$$

Or d'après le théorème de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e_\tau(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |e_\tau(t)|^2 dt = \tau a^2$$

le gain en amplitude $G_a = \sqrt{G_p}$ vaut donc $M\sqrt{\tau\Delta\omega_p}$.

On raccorde les deux expressions asymptotiques obtenues l'une pour $\frac{1}{\tau} \ll \Delta\omega_p$, l'autre pour $\frac{1}{\tau} \gg \Delta\omega_p$ en considérant que pour $\tau\Delta\omega_p = 1$ le gain en amplitude vaut M .

L'extension temporelle d'un tronçon de sinusoïde doit donc être de $\tau \neq \frac{2}{\Delta\omega_p}$ pour que l'on puisse considérer qu'elle se comporte comme une «sinusoïde pure».

Ce calcul n'a aucune prétention de rigueur, le résultat est retrouvé au premier ordre par une étude temporelle directe à la fin de l'appendice.

2. APPLICATIONS

2.1. Paragraphe 2.4.b.β

Il a été vu figure 19 que l'atténuation correspondant à n aller-retours dans la cavité est A_n .

Pour que le tracé de la figure 19 soit correct, c'est-à-dire pour que la largeur de la raie à $A_n/\sqrt{2}$ soit effectivement $\Delta\omega_c$; il est nécessaire d'avoir τ : durée des n aller-retours $(\tau = n \frac{2d}{c})$, tel que $\frac{1}{\tau} \ll \Delta\omega_c = \frac{\omega_1}{Q}$.

$$\text{Soit } n \gg \frac{cQ}{4\pi\nu_1 d}$$

$$\text{A.N. } \begin{cases} \nu_1 = 4,8 \cdot 10^{14} \\ d = 0,2 \text{ m} \\ Q \text{ entre } 10^8 \text{ et } 10^9 \end{cases} \quad \text{d'où } n \gg 40$$

Si nous fixons $n=500$, tous les 500 aller-retours, l'amplitude de la sinusoïde est multipliée par A_{500} .

2.2. Paragraphe 2.5.

Il a été vu que le système évoluait au cours du temps par passages successifs dans la boucle. Reste à déterminer la durée τ d'un passage.

En se plaçant au début de l'amorçage des oscillations, on peut considérer que la fonction de transfert $B(\omega)G(\omega)$ de la boucle est linéaire.

Pour pouvoir dire que l'amplitude de la sinusoïde a été multipliée par $|B(\omega_1)G(\omega_1)|$ il faut que son extension temporelle soit d'après 1.

$$\tau \# \frac{2}{\Delta\omega_p}$$

numériquement :

★ pour l'oscillateur électronique, pour une fréquence d'oscillation $\nu_1 = (1/2\pi RC)$ de l'ordre du kHz, le calcul élémentaire de la bande passante donne :

$$\Delta\omega_p = \frac{3}{RC}$$

d'où τ de l'ordre de 10^{-3} s.

★ pour le Laser He-Ne ordinaire, $\tau \# \frac{2}{\Delta\omega_{\text{accrochage}}}$

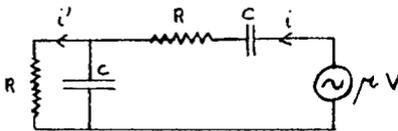
de l'ordre de 10^{-9} s, car la position des raies varie à l'intérieur de la plage d'accrochage à cause des fluctuations thermiques de la cavité.

★ pour le Laser He-Ne stabilisé (un dispositif annexe permettant de s'affranchir des fluctuations de longueur de la cavité), $\tau \# \frac{2}{\Delta\omega_{\text{cavité}}}$ de l'ordre de 10^{-6} s.

2.3. Vérification sur un exemple des approximations faite au 1. :

Cas de l'amorçage des oscillations dans le cas de l'oscillateur à Pont de Wien.

★ Étude temporelle directe



$$\left\{ \begin{aligned} \mu V &= \frac{1}{C} \int i dt + Ri + V \\ V &= Ri' = \frac{1}{C} \int (i - i') dt \end{aligned} \right.$$

d'où $RC \frac{d^2V}{dt^2} - (\mu - 3) \frac{dV}{dt} + \frac{V}{RC} = 0$

Prenons comme condition initiale un signal de bruit à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ d'amplitude V_0 , ce qui donne

$$V = V_0 \exp[(\mu - 3)/2RC]t \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

L'amplitude $A(t) = V_0 \exp[(\mu - 3)/2RC]t$ croit exponentiellement.

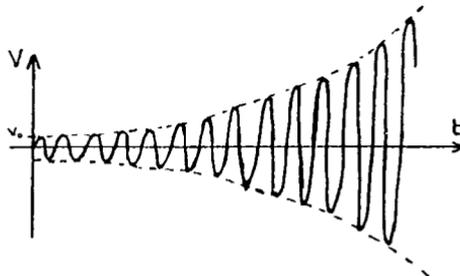


Figure 40a

Étude fréquentielle

Prenons les mêmes conditions initiales que précédemment. Pour qu'il y ait amorçage des oscillations il faut que : $|B(\omega_0)G(\omega_0)| = 1 + \epsilon$ $\epsilon > 0$ (tant que V est faible):

A chaque tour dans la boucle, c'est-à-dire, au bout de chaque durée τ l'amplitude du signal est multipliée par $(1 + \epsilon)$.

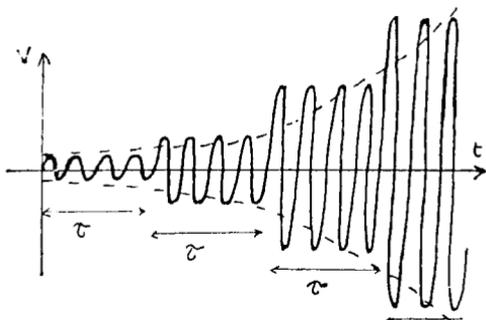


Figure 40b

$$A(t) = V_0 (1 + \epsilon)^{t/\tau} = V_0 \exp[(t/\tau)\ln(1 + \epsilon)] \approx a_0 \exp(t\epsilon/\tau) \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre,}$$

$$\text{or } 1 + \epsilon = \frac{\mu}{3} \quad \text{d'où } \epsilon = \frac{\mu - 3}{3}$$

$$A(t) = V_0 \exp[t(\mu - 3)/(3\tau)]$$

$$\text{or } \frac{1}{\tau} \approx \frac{\Delta\omega_p}{2} = \frac{1}{2} \frac{3}{RC}$$

$$\text{d'où } A(t) = V_0 \exp[(\mu - 3)/2RC]t.$$

On retrouve bien la même croissance exponentielle de l'amplitude que par l'étude temporelle directe.

Une étude sérieuse de la notion de durée d'un passage dans la boucle ne peut faire l'économie d'une simulation cas par cas sur ordinateur.

Appendice n° 2

Détermination quantitative de l'allure du signal de sortie de l'oscillateur à pont de Wien

Considérons le cas d'un amplificateur idéal (résistance d'entrée infinie et résistance de sortie nulle) ; et celui d'une non linéarité douce.

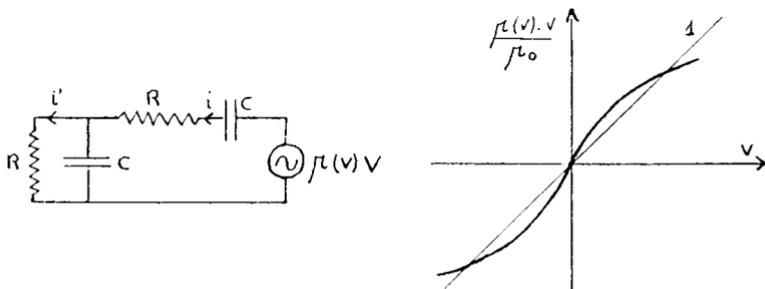


Figure 41

Pour un système linéaire : $\mu(V) = \mu_0 = 3$

Pour une non linéarité douce, développons la fonction impaire représentée à l'ordre 3 :

$$\frac{\mu(V) \cdot V}{\mu_0} = aV - bV^3$$

avec $a > 1$ (a proche de 1) et $b > 0$ (b petit)

Les équations électriques du circuit s'écrivent :

$$\mu_0 (aV - bV^3) = V + Ri + \int \frac{i}{C} dt$$

$$V = Ri' = \frac{1}{C} \int (i - i') dt$$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$; $\alpha = \mu_0 a - 3$; $\beta = \frac{3b}{\mu_0 a - 3}$

Il vient
$$\boxed{\frac{d^2V}{dt^2} + \omega_0^2 V = \alpha (1 - BV^2) \omega_0 \frac{dV}{dt}}$$

Cette équation différentielle non linéaire, dite de «Van der Pol» peut être résolue par la méthode des perturbations α étant petit ($\alpha > 0$ et $\beta > 0$). Le calcul «long» ne sera pas reproduit ici (cf. référence (1)).

En prenant comme condition initiale $\frac{dV(0)}{dt} = 0$, le développement en série $V(t)$ limité à ses 2 premiers termes donne :

$$V(t) = \pm \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\cos \omega t + \frac{3\alpha}{8} \sin \omega t - \frac{\alpha}{8} \sin 3\omega t \right)$$

$$\text{avec } \omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\alpha^2}{16}}$$

Le changement de fréquence dû à la non linéarité est un effet du second ordre.

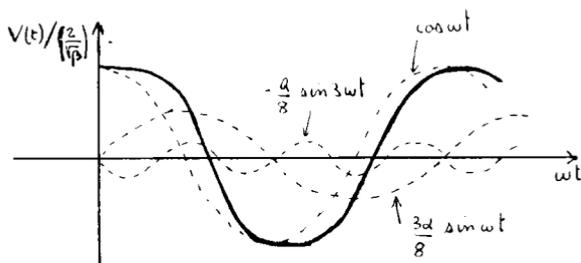


Figure 42

Par rapport à une sinusoïde, la pente aux faibles amplitudes est augmentée et les sommets aplatis. Ceci est conforme à ce qui avait été prévu qualitativement au C]2).

Pour des non linéarités dures, il est nécessaire d'effectuer un développement en série de $V(t)$ à un ordre plus élevé. Le signal obtenu est alors de la forme suivante :

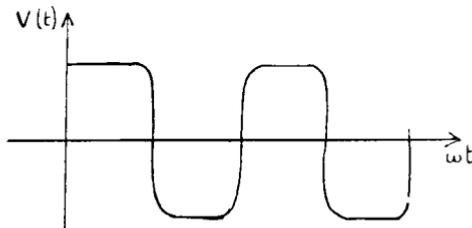


Figure 43

BIBLIOGRAPHIE

★ **Référence [1]** : (Résolution de l'équation de «Van der Pol») systèmes non linéaires. Gille Decaulne Pelegrin

Tome II chapitre 9 : Méthodes analytiques de mécanique non linéaire.

★ **Sur les oscillateurs en électronique**

- J.C. Marchais : L'amplificateur opérationnel et ses applications (Masson).
- R. Damaye : L'amplificateur opérationnel et ses applications (Éditions Radio).
- F. Dattée, S. Della Maestra : Amplop (Vuibert).

★ **Sur le laser**

- F. Hartmann : Les lasers. Collection «Que sais-je ?» (P.U.F.).
- H. Maillet : (coordinateur) : Le Laser.
(série d'articles très abordables d'auteurs différents sur le sujet) (Technique et documentation).
- B.A. Lenguyel : Introduction à la physique du laser (Eyrolles).