Considérations historiques et difficultés d'élèves à propos des grandeurs vectorielles

Ali LOUNIS
Groupe de Recherche en Didactique de la Physique
Université de Provence, 13000 Marseille

Plusieurs recherches didactiques et psychologiques concernant le domaine de la mécanique notamment, ont permis de faire des rapprochements entre la manière dont se construit le savoir individuel de l'enfant et celle qui caractérise l'élaboration historique du savoir scientifique en général. C'est ainsi que de remarquables analogies ont été relevées entre des raisonnements de savants anciens et certains raisonnements d'élèves, entre leurs erreurs respectives, entre les difficultés rencontrées par les uns et les autres, et ce, malgré une indéniable différence des contextes culturels ou idéologiques respectifs.

A défaut d'un véritable parallélisme entre le développement de la connaissance individuelle et le développement historique de la science, il y aurait, selon HALBWACHS (1974 ; 11) *«quelque chose de commun dans la structure des deux problèmes : celui posé à l'intelligence de l'enfant de neuf ans et celui posé au philosophe scolastique du XIVe siècle».*

Pour ROSMORDUC (1978 ; 18), « *la mécanique spontanée, celle de l'enfant mais aussi de l'adolescent et de l'adulte n'ayant reçu aucune formation scientifique est, pour une grande part, identique à celle d'Aristote.»*

Certes, il ne peut être question de faire récapituler à l'élève toutes les grandes découvertes scientifiques. Pour la géométrie par exemple, celles-ci remontent au tout début de l'antiquité, et ce serait tout à fait fastidieux.

Nous retenons en l'occurence, pour ce qui est de notre domaine et de bien d'autres, que rien n'est futile pour mieux comprendre les choses et faire progresser la réflexion. Aussi, la contemplation du passé, la connaissance directe des oeuvres anciennes peuvent-elles nous apporter l'irremplaçable leçon des détours, des scrupules, des ilusions ou des erreurs de notre pensée pendant des siècles. Cette leçon peut s'avérer parfois aussi féconde que celle des exploits et des conquêtes scientifiques enregistrés, en nous faisant prendre conscience de leur caractère souvent relatif et provisoire, en enrichissant les perspectives d'avenir qui s'ouvrent à notre esprit explorant le monde.

Ainsi l'apport de la prise en compte de données historiques, non réduite aux préoccupations d'érudition puriste, revêt à notre sens un caractère positif à plus d'un titre, pour le didacticien, mais aussi l'enseignant. Cela peut donc éclairer et inspirer dans une large mesure notre démarche de recherche, en contribuant notamment à mieux fonder certaines idées de recherche souvent peu évidentes a priori.

Dans cet article, nous ne nous préoccupons pas de relater et d'analyser de façon précise et exhaustive la succession des différents événements qui ont marqué l'évolution d'un domaine scientifique donné, dans leur exacte chronologie. Ceci relève des activités des spécialistes historiens des sciences, lesquels ont d'ailleurs fort à faire avec la masse considérable des manuscrits et parchemins non complètement décryptés.

Nous nous attacherons plutôt ici à repérer, dans l'abondante littérature disponible sur l'histoire de la mécanique et des mathématiques et dans quelques ouvrages originaux marquants, certains faits scientifiques importants à même d'illustrer valablement et/ou de corroborer quelques unes des hypothèses retenues dans le cadre de ce travail.

Plus précisément, il s'agit de repérer et d'interpréter dans les ouvrages concernant les débuts du calcul vectoriel, des points communs, analogues ou similaires aux difficultés et conceptions répandues chez les lycéens d'aujourd'hui. Nous nous intéressons particulièrement aux obstacles rencontrés par les grands physiciens et mathématiciens ayant très tôt proné l'utilisation de la représentation vectorielle, aux attitudes, opinions et réfutations éventuelles que leur opposaient leurs pairs les plus réticents.

En tout hypothèse, c'est là que nous pensons trouver des éléments d'explication au développement lent et tardif du calcul vectoriel, dont l'essor a commencé il y a moins d'un siècle.

Dans le même ordre d'idées, il nous a semblé utile d'envisager de prime abord un aperçu sur les origines lointaines des entités vectorielles et sur le contexte dans lequel elle sont apparues, afin d'accéder, entre autres, à une meilleure appréciation des difficultés qu'a connues leur développement initial.

1. LES ORIGINES LOINTAINES DES NOTIONS VECTORIELLES :

Comme le souligne M.J. CROWE dans son ouvrage en anglais (1967 ;6) – ouvrage partiellement repris, en français, par E.COUSQUER

(1983 ;6) – consacré à l'histoire de l'analyse vectorielle et à l'évolution de l'idée de système vectoriel, les notions originelles de vecteur prennent historiquement racines dans deux très anciennes traditions distinctes, relevant de l'évolution générale des mathématiques et des sciences physiques, avec toutefois quelques périodes d'interférence et de convergence.

La première tradition concerne le processus millénaire d'élargissement du concept fondamental de nombre. Ce processus aurait débuté du temps de Babylone et de l'Egypte ancienne, pour aboutir aux développements récents des mathématiques modernes. Initialement réduit aux entiers positifs, le concept de nombre évolua progressivement, intégrant successivement les nombres fractionnaires, le zéro, les nombres relatifs ou algébriques, les nombres imaginaires et complexes...

Comme nous le verrons plus en détail par la suite, c'est à propos de la représentation des nombres complexes, au début du XIXe siècle que l'outil vectoriel connut ses premiers développements, non sans rencontrer de sérieux écueils que nous allons tenter de mettre en évidence.

La deuxième tradition a trait à l'utilisation et à la recherche continuelle d'entités mathématiques nouvelles pour décrire et représenter la réalité empirique. Le parallélogramme des vitesses moyennes peut être trouvé chez Archimède, sous une forme primaire, mais l'idée d'additionner des vecteurs ou segments de droite orientés de façon quelconque, comme des quantités abstraites, n'a pas pu précéder leur existence propre.

Depuis l'antiquité grecque, on utilisait des symboles géométriques pour résoudre des problèmes de physique.

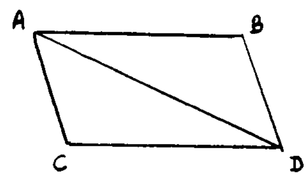
GALILEE (1633 ; 8) excella dans la pratique quasi-systématique de cette méthode qu'il contribua à perfectionner. Pour marquer les limites de la logique discursive et de ses prolongements rhétoriques, en ce qui concerne l'investigation scientifique, il accordait une place et une confiance accrues en la manipulation des nombres en association avec ses raisonnements sur des quantités physiques observables et mesurables. C'est lui qui proclamait notamment que «*Le livre de l'Univers* est écrit dans le langage mathématique, dont les symboles sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques sans l'aide desquels il est humainement impossible d'en comprendre le moindre mot*» et que « *les mathématiques...fournissent (au physicien) la seule langue qu'il puisse parler*».

* «Livre de l'univers», au sens de l'ensemble des connaissances éprouvées et écrites, que l'homme a du monde qui l'entoure.

A l'origine des sciences physiques, par la résolution de problèmes pratiques et concrets qu'elle permettait de résoudre, la géométrie apparaît comme le premier palier d'abstraction de la réalité accessible aux sens.

Au XVIIe siècle, cette symbolisation géométrique commençait à se transformer progressivement pour tendre à représenter de nouvelles grandeurs physiques telles la vitesse, la force, l'accélération. Le parallélogramme des vitesses et celui des forces restaient connus de façon encore imprécise par NEWTON tant l'amalgame force-vitesse perdurait. A propos de la composition de deux forces, ce dernier utilisait des segments de droite représentant des espaces parcourus pendant un temps donné :

«COROLLAIRE I : Un corps sur lequel s'exercent des forces conjointes décrit la diagonale d'un parallélogramme dans le même temps où il en aurait parcouru les côtés sous l'action de l'une ou l'autre de ces forces.



Soit un corps qui sous l'action d'une force unique M imprimée en A est transporté d'un mouvement uniforme, en un temps donné, de A vers B ; et de A vers C, sous l'action d'une force unique N imprimée au même point. Si l'on complète le parallélogramme ABCD (Fig 1), le corps sera transporté par les deux forces le long de la diagonale de A à D. Car, puisque la force N agit suivant la droite AC parallèle à BD, cette force d'après la loi II, ne change rien à la vitesse d'accès à BD que l'autre force génère. Le corps mettra donc le même temps à parvenir à la droite BD, que la force N lui soit ou non imprimée ; et ainsi, à la fin de ce temps-ci, il se trouvera en quelque endroit de cette droite BD. Par le même raisonnement, au terme de ce même temps, le corps se trouvera quelque part, sur la droite CD ; et pour cette raison, il lui faut nécessairement se trouver au point d'intersection D de ces deux droites. Par la loi I d'autre part, il ira de A vers D d'un mouvement rectiligne.

COROLLAIRE II : De là, il ressort manifestement qu'une force allant directement de A vers D est composée de forces quelconques obliques AB et BD, et réciproquement qu'une force AD quelconque directe se résoud en des forces obliques quelconques AB et BD. De plus, ces compositions et résolutions tirent amplement confirmation de la mécanique.

Extrait de ***NEWTON - «Les Principia»***

Jusque là, les aspects «*mystérieux*» et métaphysiques mêlés caractérisant l'idée qu'on se faisait de la force associée aux «*qualités occultes*» ancestrales de la matière telle l'impénétrabilité, interdisaient vraisemblablement toute tentative de représentation figurative concrète de cette entité invisible essentiellement qu'était la force.

LEIBNIZ soulignant l'insuffisance de l'algèbre laquelle exprime seulement la grandeur, et non la direction, l'angle ou le mouvement, se prononcait déjà pour une algèbre nouvelle intégrant en son sein des symboles géométriques.

Son « *Essai sur la géométrie de situation* » (7698 ; 14) ne sera cependant publié que plus d'un siècle plus tard, en 1833. Dans ses tentatives, il ne parvint pas à découvrir et distinguer que AB $\neq$ BA, par exemple.

BELIDOR représentait les forces par des schémas de cordes ou de fils tendus par une main tirant à une extrémité (voir figure page suivante).

Nous ne sommes pas loin de la représentation par des flèches, le caractère vectoriel est déjà implicitement présent, mais l'explicitation mathématique de l'instrument conceptuel n'interviendra que bien plus tard, le XVIIIe restant dominé par les développements de l'analyse infinitésimale, des calculs différentiel et intégral appliqués à la mécanique, avec les travaux de Lagrange et Euler.

Les équations de la mécanique ne portaient alors que sur les composantes dans un repère cartésien.

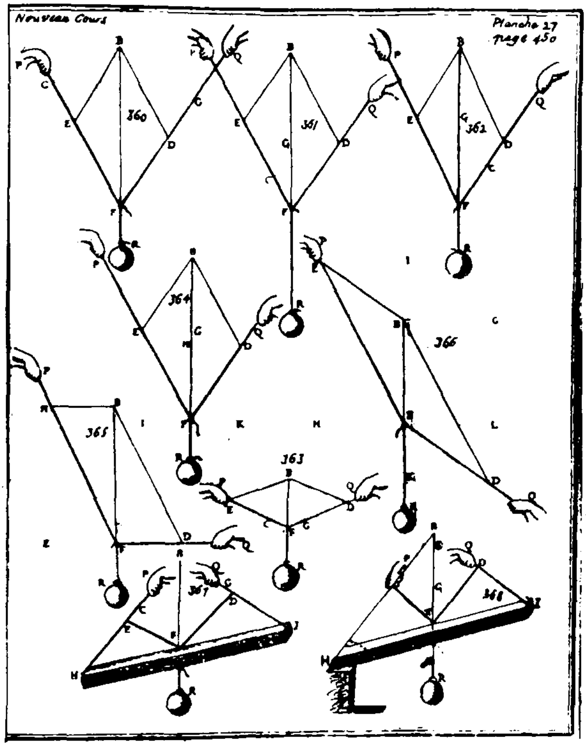
L'idée que toute grandeur pouvait être totalement exprimée par un nombre était largement répandue et admise depuis longtemps.

Cette idée se fondait généralement sur des références à des situations concrètes et sur une approche à connotation «*substancialiste*» de la notion de grandeur définie classiquement comme «*toute quantité susceptible d'augmentation ou de diminution*». Cette idée de grandeur physique restait étroitement associée aux opérations de comptage de quantités discrètes, ou de mesurage direct de grandeurs observables continues comme la longueur ou le volume par exemple.

On peut comprendre aisément qu'un tel contexte n'ait pas favorisé l'éclosion initiale, ni facilité le développement, chez les physiciens, de nouvelles entités géométriques abstraites. A propos de vitesse et de force, jusque vers 1800, on se bornait à parler de «*quantité dirigée*», de «*grandeur assortie d'une direction*», de «*grandeur orientée ou dirigée*», comme pour attribuer une simple propriété supplémentaire à une certaine notion de grandeur, dont la nature essentiellement numérique demeurait inaltérée ou irréductible.

Le terme de «*vector*» n'apparaîtra en mathématiques qu'en 1843, chez HAMILTON, dans ses travaux sur les quaternions dont on aura un aperçu au chapitre suivant.

Extrait de BELIDOR : Nouveau cours de Mathématiques...1725 :



2. LES DÉBUTS DU CALCUL VECTORIEL : OBSTACLES ET RÉFUTATIONS :

Pour souligner l'importance historique de cette étape décisive pour la formalisation de concepts physiques fondamentaux, citons EINSTEIN :

«*Le nombre est à lui seul insuffisant pour décrire certains concepts physiques. La reconnaissance de ce fait a marqué une avance très nette dans l'investigation scientifique... une direction est aussi essentielle qu'un nombre*». (7)

En effet, le passage de considérations strictement numériques à des entités vectorielles, autrement plus riches et plus abstraites, représente de toute évidence «*un saut informationnel et conceptuel*» de grande portée aux plans de la phylogénèse et de l'ontogénèse du savoir physico-mathématique.

Pour illustrer ce point de vue et donner une idée de l'importance des difficultés que peut rencontrer à sa naissance une notion mathématique nouvelle, aussi simple puisse-t-elle paraître de nos jours, voyons l'exemple des nombres négatifs.

Cette notion dont le statut a connu des ruptures et rencontré de vives réticences dans un passé relativement récent, a fait l'objet d'une intéressante étude de SCHUBRING (1986 ; 20), lequel note effectivement que :

– D'Alembert, l'encyclopédiste du XVIIIe siècle, critiquait la théorie des nombres négatifs «*nombres en dessous de rien, notions absurbes... les nombres négatifs sont des nombres positifs avec des positions fausses*».

– Le mathématicien BUSSET (1843) était encore choqué de «*l'existence de quantités plus petites que rien*» qu'il s'interdisait de faire figurer dans le résultat d'un calcul.

On peut remarquer que le mot «*rien*» revient dans la plupart des arguments de ce type, à la place du zéro. Ce mot traduirait une allusion à l'absence de matière ou au vide, desquels on ne peut soustraire aucune quantité. Aussi, pour interpréter ce type d'objection à la notion de nombre négatif, on peut légitimement parler d'obstacle épistémologique «*substancialiste*», concept auquel BACHELARD (1938 ; 2) attribue un caractère très général dans le développement historique de la physique, domaine indissociable de celui des mathématiques, nous l'avons souligné auparavant.

Il en a été sensiblement de même pour ce qui est des nombres imaginaires, puis des nombres complexes, lesquels étaient regardés avec méfiance jusque vers 1800. La question que $\sqrt{-1}$ ne puisse être ni supérieur, ni inférieur, ni égal à zéro était préoccupante depuis plusieurs siècles.

Cette tendance à projeter une relation d'ordre dans l'ensemble des nombres complexes, à vouloir ainsi en faire un ensemble entièrement «*hiérarchisé*» comme celui des nombres positifs (ou celui des nombres relatifs) peut également relever du même type d'obstacle général ci-dessus évoqué.

On retrouve cette même tendance pour les premières entités à caractère vectoriel du siècle dernier, comme on le verra ci-après. On pense aussi qu'elle se manifeste assez souvent de nos jours, chez les jeunes élèves en particulier, à propos des vecteurs et grandeurs vectorielles.

C'est là un point de similitude parmi d'autres, entre l'étude historique ici rapportée et les hypothèses qui sous-tendent la partie étude expérimentale des conceptions des élèves. On s'attachera donc à le mettre en évidence.

Les exemples repris ci-dessus sur les nombres relatifs et les nombres imaginaires peuvent donner dores et déjà une idée de l'ampleur des difficultés qu'ont dû surmonter les notions vectorielles naissantes, pour se faire accepter par la communauté scientifique, au moment de leur apparition et longtemps après.

Bien que «*implicitement la mécanique était porteuse depuis Galilée du concept de vecteur*» comme l'écrivait ROSMORDUC (1975 ; 19), les travaux des mécaniciens ne semblent pas avoir eu d'influence directe sur l'émergence des premières entités vectorielles. C'est en effet en Mathématiques, aux alentours de 1800 et à propos de la représentation géométrique des nombres complexes, que celles-ci apparurent en tant que telles, vraisemblablement comme de libres créations de l'intelligence humaine, non entièrement déterminées par la réalité extérieure ni destinées à en donner une représentation formalisée. Toutefois, des physiciens participèrent à leur développement ultérieur. A travers l'étude de quelques ouvrages marquants de cette période, nous avons essayé de repérer et d'interpréter les résistances et réfutations rencontrées et à même de nous permettre d'avancer quelques explications à la lenteur de ce développement, lequel s'est étalé sur près d'un siècle.

Vers 1830, cinq mathématiciens au moins avaient déjà abordé la question de la représentation des nombres complexes, indépendamment les uns des autres. Leurs tentatives furent souvent accueillies avec une grande réserve, y compris initialement par le grand mathématicien que fut GAUSS lequel participa par la suite à leur émancipation, de façon décisive.

Après WALLIS dont la tentative au XVIIe siècle fut sans succès, WESSEL (1799 ; 21) fut le premier à «*additionner*» deux segments de droite quelconques qu'il appelait «*lignes inclinées*, en entamant le deuxième à la suite de l'extrêmité du premier. Il obtient ainsi ce qu'il appelle le «*chemin utile*», somme de deux «*chemins parcourus*» donnés. Il représentait tout segment de droite par l'expression complexe $a + \epsilon b$, avec $\epsilon\epsilon = \epsilon^2 = -1$ et «ϵ perpendiculaire à 1».

ARGAND (1806 ; 1) dans son «*Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*», a cru encore nécessaire de commencer par récuser explicitement l'idée alors obsolète que les nombres négatifs puissent être considérés comme «*impossibles, imaginaires ou absurdes*».

Il argumenta son projet de représenter géométriquement $\sqrt{-1}$, par analogie aux deux termes définissant une fraction, pour appuyer le double souci d'exprimer à la fois le nombre et la direction (et sens) qui peut lui être associée.

Considérant $x = \sqrt{-1}$ et $\frac{x}{1} = \frac{-1}{x}$, et regardant x comme une moyenne arithmétique et une «moyenne de position» simultanément, il conclut que x devrait se situer sur l'axe de symétrie médian du segment $(-1, +1)$ et que de ce fait x ne peut être ni absurde, ni irréel. Il légitima ainsi l'existence des nombres imaginaires en affirmant :

«*les quantités dites imaginaires sont donc tout aussi réelles que les quantités positives et les quantités négatives, et n'en diffèrent que par leur position qui est perpendiculaire à celle de ces dernières*».

Nous reprenons plusieurs extraits de son ouvrage pour donner une idée de sa démarche alliant les deux idées de grandeur et de direction, et conjugant réalisme géométrique et formalisme algébrique symbolique.

Commentant sa démarche, ARGAND écrit :

«*On se borne à proposer la méthode des directions comme un moyen de recherches qui, dans certains cas, peut être utilement employé, à cause de l'avantage qu'ont les constructions géométriques de présenter aux yeux un tableau propre à faciliter quelquefois les opérations intellectuelles. Il sera d'ailleurs toujours possible de traduire dans le langage accoutumé les démonstrations tirées de cette méthode*».

On peut relever ici le double statut initialement accordé à cette représentation géométrique, à la fois schéma-outil et support servant d'aide à l'activité de conceptualisation.

Il représente un nombre complexe par un segment sans flèche appelé «*ligne dirigée*» (exemple : $\overline{AK} = -\overline{KA}$), puis il définit des méthodes (algorithmes) géométriques d'addition, de multiplication et de division des nombres complexes.

Préférant l'expression re^{ix} connue longtemps auparavant, plusieurs mathématiciens lui opposèrent de vives critiques dans les Annales de

Mathématiques de Gergonne, l'une des principales revues spécialisées de l'époque.

Après quelques louanges adressées à son oeuvre comme :

«*des recherches d'Argand ont éclairé d'un jour inattendu les mystères qui régnaient depuis longtemps sur la véritable nature des quantités négatives et des quantités imaginaires... avec cette représentation sensible aux yeux, on s'aperçut que l'impossibilité des quantités négatives et imaginaires n'est qu'apparente*».

L'éditeur de l'ouvrage cité reprend, en préface, les critiques formulées dans les Annales :

«*C'est un simple emploi de notation particulière, superflue*»
«*... Des idées inutiles et erronées, sorte d'analogie et de convenance*»
«*Un masque géométrique... dont l'usage semble expéditif.*»
«*Ce n'est qu'un jeu utilisant des symboles particuliers*».

En réponse à ces critiques lesquelles dénotent une attitude a priori défavorable et même parfois hostile à la représentation qu'il proposait, Argand déplorait «*cette méprise... qui consiste à confondre les droites données de grandeur et de position (les segments de droite représentant les complexes) avec leur grandeur absolue ou longueur*».

Ainsi, à peine entrevus, ces «*vecteurs*» sont-ils déjà confondus ou réduits à leurs normes, par des mathématiciens de métier. C'est souligner la prégnance d'une lecture «*numérique*» ou «*scalaire*» laquelle prévalait largement à l'époque, à propos des entités mathématiques et des grandeurs physiques, et que l'on retrouve par ailleurs dans l'étude des représentations des élèves.

ARGAND a également tenté d'appuyer sa méthode par quelques exemples d'applications en physique, en faisant l'analogie avec le foyer «*imaginaire en optique dont l'existence est généralement admise, bien que cela corresponde au point de rencontre de rayons n'ayant aucune existence physique ou rayons négatifs*».

L'application de l'opération d'addition des «*lignes dirigées*» à la mécanique est faite de façon imprécise, les segments de droite considérés paraissant représenter indistinctement force, vitesse et/ou chemin parcouru. Il écrivait à ce sujet :

«*Pour la composition et la décomposition des forces... En effet une force donnée d'intensité et de direction peut toujours être représentée par une droite donnée de grandeur et de position (ou segment) qui est le chemin parcouru en vertu de cette force, dans l'unité de temps*».

WARREN (1828 ; 22) et MOUREY (1828 ; 16) développèrent séparément une représentation analogue, employant notamment les termes de «*nombres directifs*» et «*chemin directif*». Le titre de l'ouvrage de ce dernier suggère de prime abord qu'une attitude réservée prévalait encore à propos des nombres complexes. Dans sa «*Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*», celui-ci écrit notamment :
«*... que doit-on dire des imaginaires? Pour un esprit qui tient à voir clair, n'ont-elles pas quelque chose de repoussant?...*
On doit convenir que la science serait beaucoup plus satisfaisante si l'on pouvait en baser toutes les parties sur des raisonnements rigoureux, sur une évidence de premier ordre, sur des idées simples, palpables comme des éléments de géométrie».

BELLAVITIS (1832 ; 4) développa une «*Méthode des équipollences*» laquelle «*fournit à l'algèbre et à l'analyse des objets géométriques réels à la place des symboles imaginaires*».

Il utilisa,le signe $\simeq$ pour exprimer l'équipollence, soit la double égalité en valeur absolue et en direction.

Il reprend l'idée de «*somme géométrique en grandeur et en direction*» de plusieurs segments de droites, donnant ce qu'il appelle le «*Chemin utile*», les segments additionnés étant assimilés à des parcours successifs d'un mobile. Cet auteur, professeur dans une université italienne, s'intéressa aussi aux applications en mécanique en signalant notamment que le segment de droite résultat correspond en fait à la résultante des forces appliquées en un point et équipollentes aux segments additionnés.

Tous ces travaux se situaient dans le plan et ne connurent pas immédiatement de succès tangible.

C'est grâce à l'autorité scientifique de GAUSS et CAUCHY, que ces premières notions vectorielles (à deux dimensions) furent par la suite promues et largement diffusées dans la communauté scientifique.

Leur utilisation en physique ne fut toutefois pas immédiate, ni adoptée de façon systématique.

C'est aini que le Comte BARRE DE SAINT-VENANT, dans son cours de mécanique (1852 ; 3) écrivait encore :

«*Nous rejetterons absolument toutes les prétendues démonstrations du théorème du parallélogramme des forces au moyen de la règle du parallélogramme des vitesses en géométrie*».

W. R. HAMILTON (1843 ; 12), éminent savant britannique, inventa le premier système vectoriel à trois dimensions, dans le cadre a-t-il écrit, de «*ses recherches sur la généralisation tridimensionnelle du concept de nombre*».

Sa théorie sur les quaternions connut un succès considérable dès sa publication et pendant plus d'un demi-siècle.

Un quaternion s'y présente comme une entité mathématique comportant une partie réelle et une partie imaginaire :

$a + bi + cj + dk$
(avec a, b, c et d réels et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$)

La partie réelle fut appelée scalaire et la partie imaginaire vecteur. On peut vérifier que le produit de deux quaternions qu'il définit, correspond en fait au produit scalaire actuel augmenté du produit vectoriel, l'ensemble ainsi constitué n'ayant évidemment aucune signification physique connue.

Ce fut la première grande théorie à caractère vectoriel, le premier système de nombres cohérent et dont le produit ne vérifie pas la commutativité, selon le jugement de COUSQUER (1983, 5).

Par ailleurs, le quaternion d'Hamilton serait inspiré d'une analogie avec le «*vecteur*» de l'Astronomie, ce rayon-vecteur portant en quelque sorte l'astre à bout de bras, comme l'indique J.ITARD (1968 ; 13).

Si l'on note le caractère essentiellement composite ou «*hybride*» des quaternions, leur non-homogénéité évidente, on peut s'étonner de leur succès retentissant et durable auprès des physiciens et mathématiciens anglo-saxons. Ce succès historique est reconnu et particulièrement mis en relief par CROWE dans son étude.

Pour interpréter et tenter d'expliquer le fait que cette théorie pratiquement sans application en physique, fut acceptée et diffusée aussi facilement, outre la célébrité de son auteur, alors éminent astronome et Président de l'Académie des sciences d'Irlande, on peut avancer deux hypothèses plus générales :

– L'ambivalence constitutive des quaternions (de nature mi-scalaire mi-vecteur) rapproche et concilie en quelque sorte, en apparence du moins, les conceptions séculaires de grandeurs essentiellement numériques, avec la nouveauté et le caractère nettement plus abstrait de l'entité vectorielle.

Leur nature semi-réelle, donc partiellement «*concrète*», aurait relativement facilité leur acceptation et leur assimilation.

– La nécessité historique d'une étape (ou d'un palier) intermédiaire dans le processus d'élaboration du modèle vectoriel, étape associant à la fois des entités anciennes et nouvelles, à même d'assurer d'une certaine manière un passage sans rupture du «*concret à l'abstrait*», nous parait tout à fait plausible, au plan épistémologique.

Ce serait là une phase de maturation et d'affinement progressifs du concept vectoriel moderne, essentiellement à la faveur de sa confrontation avec les exigences des applications en physique.

GRASSMANN (1844 ; 9) développa un système vectoriel à trois dimensions, plus riche et plus général. Il en montra quelques utilisations en physique pour la représentation des forces et des vitesses, pour l'étude du centre de gravité... Mais son œuvre passa pratiquement inaperçue pendant des décennies, contrairement à celle d'HAMILTON.

Le Physicien MAXWELL (1860 ; 15) s'inspira des idées de ce dernier, hormis les quaternions, contribuant ainsi de façon jugée essentielle au développement du calcul vectoriel. Notons cependant que ses célèbres équations et leurs démonstrations étaient encore entièrement faites en coordonnées. La notion de champ vectoriel, initialement issue de celle de champ de vitesses dans un écoulement liquide, fut développée à propos du champ électrique et du champ magnétique dans le vide, avec notamment les travaux de Maxwell dont les équations furent par la suite condensées sous une forme vectorielle proche de celle qu'on leur connaît.

La théorie actuelle des vecteurs de l'espace à trois dimensions représentant l'espace physique, est due principalement aux contributions des physico-mathématiciens GIBBS et HEAVISIDE (1901 ; 10) à l'issue d'une longue et célèbre polémique avec les tenants des quaternions, entités mathématiques que ce dernier jugea finalement «inutiles pour la physique» (5).

L'un des premiers grands ouvrages d'enseignement d'analyse vectorielle est dû à GIBBS qui y définit ainsi ce qu'est un vecteur :
«*The typical vector is the displacement of translation in space*»,avant d'exposer le produit scalaire, le produit mixte et le produit vectoriel pratiquement sous leur forme actuelle.

Cette définition du vecteur symbolise et résume à elle seule l'essentiel de l'articulation entre mathématiques et physique ; le mouvement se trouve en effet explicitement présent dans une proposition fondamentale de mathématiques.

Le concept de vecteur se trouve bien au carrefour de la géométrie, de l'algèbre et de la mécanique classique, pour ne citer que ces domaines.

C'est entre 1900 et 1920 que l'analyse vectorielle fut graduellement introduite dans l'enseignement supérieur français.

En guise de conclusion de cette partie, on peut retenir que quelques unes des considérations historiques ci-dessus peuvent être rapprochées de certaines hypothèses ou observations relatives au problème actuel des vecteurs dans l'enseignement secondaire. On peut en effet facilement remarquer quelques similitudes avec les points suivants :

– La lenteur qui caractérise l'assimilation du modèle vectoriel laquelle débute au collège et s'achève le plus souvent à l'Université.

– Les difficultés qu'ont les élèves à se défaire d'une lecture «*numérique*» débordant largement son domaine de validité et dont on relève une certaine connotation «*substancialiste*».

– La non homogénéité des équations transcrites par les élèves, assez souvent rencontrée et probablement liée au statut mineur accordé au principe d'homogénéité mathématique des équations dans la pratique enseignante.

– La tendance des élèves à projeter une relation d'ordre dans un ensemble de vecteurs ou de grandeurs vectorielles non colinéaires.

Ces différents points feront l'objet de développements appropriés dans une autre partie de notre recherche portant sur l'étude des conceptions des apprenants relatives à certaines grandeurs physiques vectorielles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARGAND J.R - Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (1806) - Blanchard - Paris - 1971

[2] BACHELARD G. - La formation de l'esprit scientifique - Vrin - Paris - 1938

[3] BARRE DE SAINT VENANT - Cours de mécanique. Reech - 1852

[4] BELLAVITIS G. - Exposition de la méthode des équipollences - (1832) t. Laisant, Gauthier-Villars-Paris 1874

[5] COUSQUER E. - Le calcul vectoriel - La rigueur et le calcul. - IREM de Lille - 1983.

[6] CROWE M.J. - A history of vector analysis - the evolution of the idea of a vectorial system. - Notre Dame - Londres - 1967

[7] EINSTEIN A, INFELD L. L'évolution des idées en physique. - Trad. Solovine - Flammarion - Paris

[8] GALILEE - Discours concernant deux sciences nouvelles (1633). - Trad. Clavecin - A Colin - Paris - 1970

[9] GRASSMANN H.G. - Lineale Ausdehnung slehre. - Berlin (1844) (cité par CROWE M.J)

[10] GIBBS J.W., WILLSON E.B. - Vector analysis. - Arnold - Londres - 1901.

[11] HALBWACHS F. - Les fondements psychologiques de la mécanique prégaliléenne in Cahiers du Séminaire d'Histoire et Sociologie des idées et faits scientifiques. N°7 - Marseille - 1974.

[12] HAMILTON W.R. - Lectures on quaternions. - Dublin - 1953.

[13] ITARD J. - Matériaux pour l'histoire des nombres complexes - Hamilton et les quaternions. - APM 263-264- Juillet 1968

[14] LEIBNIZ G.G. - Essai de dynamique (1698) - Oeuvres concernant la physique. - Trad. Peyroux-Blanchard - 1985.

[15] MAXWELL - Treatise on electricity and magnetism (1860). (Cité par CROWE M.J.)

[16] MOUREY C.V. - La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. - Paris - 1828.

[17] NEWTON I. - Les principia. - Trad. Biarnais M.F. CNRS - Paris - 1982.

[18] ROSMORDUC J. - Histoire et pédagogie de la mécanique in Cahiers d'histoire et philosophie des sciences N°8. CDSH - Paris -1978

[19] ROSMORDUC J. - Le levier, la roue et l'horloge. - BUP 578 - Novembre 1975.

[20] SCHUBRING G. - Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. - in Petit x N° 12 - Grenoble - 1986

[21] WESSEL G. - Essai sur la représentation analytique de la direction (1799) - Ed. Valentiner - Thiele Copenhague - Trad. Zeuthen - 1987

[22] WARREN J. Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantites. - Cambridge - 1828.

[23] BENARROCHE M., GENIN C., MICHAUD-BONNET J., PELLET A. - Problèmes posés par l'utilisation des grandeurs vectorielles lors de la transition Lycée - Université ATP - Les transitions dans le système éducatif. 1985.

[24] GENIN C., MICHAUD-BONNET J., PELLET A. - Représentations des élèves en Mathématiques et en Physique sur les vecteurs et les grandeurs vectorielles lors de la transition Collège-Lycée - in Petit x n° 14 IREM- Grenoble 1987.

[25] MALGRANGE J.L., SALTIEL E., VIENNOT L. - Vecteurs, scalaires et grandeurs physiques. - Bulletin SFP. 1973.