

## Un enseignement de mécanique des fluides par des physiciens

par Étienne GUYON\* - Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT\*\*

Laboratoire d'Hydrodynamique et de Mécanique Physique

École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles

10, rue Vauquelin 75005 Paris

---

*Le titre de cet article, résultat d'une communication au congrès de Reims 1986 de l'U.d.P., reflète le fait que les trois auteurs, à travers leur formation de base de physiciens, n'ont suivi que très peu d'enseignements en mécanique des milieux continus. C'est à travers leur expérience de recherche en physique (superfluides, cristaux liquides, instabilités hydrodynamiques, écoulements diphasiques) qu'ils ont remplacé ce manque de formation initiale. Tous trois sont impliqués dans des enseignements en mécanique des fluides en DEUG (E.G.), en préparation à l'agrégation (J.P. H., L. P.), en DEA (E.G., J.P. H.) et en école d'ingénieurs (E.G., L.P.). Ils sont les auteurs d'un livre d'enseignement pour les élèves de niveau DEUG et classes préparatoires : «Hydrodynamique physique» (Interéditions, mars 1990).*

### 1 INTRODUCTION

La mécanique est souvent considérée en France comme une branche d'enseignement (et de recherche) autonome, intermédiaire entre la physique et les mathématiques appliquées. Cette vision ne nous semble pas souhaitable. Aux U.S.A., la mécanique est une branche de la puissante American Physical Society et l'Association of Physics Teachers inclut largement dans ses congrès les problèmes de mécanique des milieux continus.

Cette situation n'est heureusement pas figée. En 1975, une première école d'été aux Houches (1), organisé par les mécaniciens, a permis à des physiciens de faire connaissance avec la mécanique des fluides, discipline qu'ils avaient abordée par des aspects particuliers tels que l'hydrodynamique diphasique de l'hélium superfluide, les cristaux liquides, la rhéologie des polymères ou des suspensions...

\* aussi : Laboratoire de Physique CP2 - Université d'Orsay 91405 Orsay Cedex et Palais de la Découverte - Avenue Franklin Roosevelt - 75008 Paris.

\*\* aussi : Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon  
46, allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07

Le clivage mécanique-physique dont ont pâti les générations passées de scientifiques a tendance (et c'est fort heureux) à disparaître chez les chercheurs plus jeunes.

Du côté de l'enseignement, de nombreuses maîtrises de physique incluent désormais un enseignement de mécanique des fluides. Cet enseignement apparaît timidement et sous une forme encore très traditionnelle dans les premiers cycles des Universités et les classes préparatoires aux grandes écoles. C'est à partir de ces constatations et de notre ferme conviction que la mécanique des fluides a largement sa place dans le cursus de l'enseignement de physique dans les lycées et collèges, que nous présentons ce témoignage de pratique d'enseignants.

### 1.1. Un peu d'histoire

Sans remonter aussi loin que les allées de tourbillons dessinées par Léonard de Vinci et surtout sans chercher à faire œuvre d'histoire des sciences, il est possible de marquer de quelques noms les développements de l'histoire de la mécanique des fluides, ce qui nous permettra de faire connaissance avec quelques idées fortes de la discipline.

Le XVIII<sup>ème</sup> siècle est marqué par les travaux de l'école de Bâle. Nous reproduisons en figure 1 le schéma d'une expérience d'un jet incident sur une plaque due à D. Bernoulli qui écrit en 1738 «Hydrodynamica». Le calcul de la réaction du jet est donné dans l'encart 1 : il résulte simplement de l'expression de la loi de conservation de la masse ou de débit (équation de continuité), de celle de l'énergie cinétique qui, pour le fluide parfait (sans viscosité) considéré dans cet exemple, a la forme de l'équation dite de Bernoulli, et de celle de la quantité de mouvement. Cette évaluation est effectuée dans un volume fermé quelconque appelé «volume de contrôle» qu'il est pratique de limiter par un ensemble de lignes de courant ou de surfaces perpendiculaires à celles-ci. Elle exprime que le flux de la quantité considérée à travers la surface qui limite ce volume de contrôle est la source de la variation de densité volumique de cette quantité. L. Euler (qui était un élève de Bernoulli) écrit en 1755 une théorie des machines mises en mouvement par la réaction de l'eau ; il formule aussi l'équation de l'hydrodynamique du fluide parfait (équation d'Euler) qui est, de fait, l'équation locale de bilan de l'impulsion d'un tel fluide. Nous reviendrons un peu plus tard sur l'utilisation du volume de contrôle en mécanique.

Le XIX<sup>e</sup> siècle est marqué par la clairvoyante analyse de O. Reynolds en 1861 sur l'apparition de la turbulence dans un tube cylindrique : celle-ci est due à l'amplification de petites perturbations de la vitesse de l'écoulement. Ce n'est en fait que plus d'un siècle plus tard que l'on saura analyser précisément le seuil d'apparition de la turbulence dans ce simple

écoulement. L'écoulement parabolique laminaire d'un fluide visqueux dans un tube «résiste» à des perturbations infiniment petites jusqu'à des vitesses infiniment grandes (soit, dans la formulation adimensionnelle que nous considérons plus loin, jusqu'à des nombres de Reynolds infinis !). Il est nécessaire pour faire apparaître la turbulence d'avoir des perturbations initiales d'amplitude finie. L'expérience originale de Reynolds reproduite ultérieurement à Bristol où l'expérience avait été initialement réalisée a donné d'ailleurs un seuil de turbulence inférieur à cause de l'augmentation des vibrations du sol de la ville (2) !

Nous voulons dégager de ce XIX<sup>ème</sup> siècle l'œuvre de deux expérimentateurs français Maurice Couette (3) et Henri Bénard (4).

La thèse de Couette est l'étude de l'écoulement d'un liquide contenu entre deux cylindres concentriques, le cylindre extérieur tournant à une vitesse angulaire  $\omega$ . A faible vitesse, le couple  $\Gamma(\omega)$  exercé sur le cylindre extérieur croît linéairement avec  $\omega$ . Couette relie l'augmentation plus rapide de  $\Gamma(\omega)$  au-dessus d'un seuil  $\omega_C$  à l'apparition de la turbulence : les mouvements turbulents créent en effet des échanges de quantité de mouvement entre les cylindres très supérieurs aux simples échanges diffusifs dus à la viscosité. Eut-il échangé le rôle des cylindres extérieur et intérieur qu'il aurait trouvé ce que Taylor (5) a observé et expliqué 33 ans plus tard : l'apparition de structures régulières sous forme de rouleaux toroïdaux de diamètre égal à l'espace entre les cylindres. Le seuil d'apparition de ces rouleaux est parfaitement défini (à la différence de l'expérience de Reynolds) ; il correspond à une structuration régulière de l'espace à la différence des mouvements turbulents de l'expérience de Couette. Le mécanisme générateur de l'instabilité de Taylor est l'excédent de force centrifuge que possèdent les petits éléments de fluide proches de l'axe par rapport aux particules plus éloignées : ceci conduit au basculement générateur de la structure en rouleaux.

L'existence de la structuration périodique d'un fluide avait en fait été décrite en premier par Bénard dans sa thèse soutenue en 1901 à l'E.N.S. Paris (4). Bénard observe que, si une couche mince et horizontale de liquide est chauffée par en-dessous, un réseau hexagonal de cellules de convection dont la taille est de l'ordre de l'épaisseur de la couche se développe. Le même genre de structures explique la granulation solaire à une toute autre échelle. Sous une forme différente dégagée par Lord Rayleigh, une couche liquide emprisonnée entre deux plaques parallèles horizontales portées à des températures différentes se structure sous forme de rouleaux parallèles de diamètre égal à la distance entre les plaques lorsque la température de la plaque inférieure excède d'une valeur  $\Delta T_C$  fonction de l'épaisseur  $d$  de la couche ( $\Delta T_C \propto d^{-4}$ ) celle de la plaque supérieure. La formation

de certaines structures de nuages en rouleaux parallèles est liée à un tel mécanisme. Ici, c'est l'excédent de poussée d'Archimède sur le fluide près de la plaque inférieure qui est le moteur de l'instabilité et qui joue le rôle de l'excédent de force centrifuge de l'expérience de Taylor-Couette.

Si un calcul complet du seuil d'instabilité de ces problèmes est lourd, par contre des solutions simples dégageant les mécanismes fondamentaux et les couplages conduisant à l'instabilité peuvent être trouvés et pourraient être insérés dans un enseignement au niveau du baccalauréat.

Depuis une vingtaine d'années, l'étude de transitions telles que l'instabilité de Taylor-Couette (ou de Rayleigh-Bénard) a connu un regain d'intérêt justifié par la séquence d'instabilités conduisant à la turbulence lorsque la vitesse angulaire  $\omega$  (ou la différence de température  $\Delta T$ ) croît. Cette apparition du **chaos**, bien décrite dans la littérature (6), est caractéristique de systèmes dynamiques à petit nombre de degrés de liberté et est bien différente de la transition brutale observée par O. Reynolds qui implique l'apparition simultanée d'un grand nombre de degrés de liberté.

Le XX<sup>e</sup> siècle est marqué par la personnalité de Geoffrey Ingram Taylor dont nous avons déjà mentionner le nom. Doué d'une intuition et d'un génie de l'expérience originale, élégante et spectaculaire, et de l'explication mathématique simple, il va aborder tous les secteurs essentiels de la mécanique des fluides en dégageant les caractéristiques essentielles ; ses sujets d'intérêt sont allés du pouvoir d'étalement d'un pinceau à la navigation des microorganismes ou à la turbulence aux grands nombres de Reynolds. (Nous avons présenté (7) dans un récent bulletin de la S.F.P. une notice sur Taylor à l'occasion d'un congrès célébrant le centième anniversaire de sa naissance). Chaque article de Taylor est une source d'inspiration pour l'enseignement. Tous ses articles originaux nous ont aidé, dans notre apprentissage en mécanique des fluides, à trouver un style proche de l'esprit physique, partant de l'observation, dégageant les mécanismes, les ordres de grandeur et recherchant la simplicité analytique. L'école britannique autour de Batchelor dont le livre de mécanique des fluides est une référence de base reconnue (8), a su bien conserver l'esprit de Taylor.

Dégageons aussi le nom de Ludwig Prandtl, inventeur de la notion de couche limite et grâce à qui la notion de volume de contrôle a connu auprès des mécaniciens sa plus large utilisation.

Le XX<sup>e</sup> siècle nous semble avoir accusé les divergences entre mécaniciens et physiciens. L'attrait de la relativité et de toutes les portes ouvertes par la mécanique quantique en sont une explication, mais

insuffisante. Einstein, Heisenberg, Bohr en particulier ont d'ailleurs contribué de façon appréciable à la mécanique des fluides. Pour comprendre ce clivage, prenons l'exemple d'un argument dû à Vicenti (9) utilisant la notion de «volume de contrôle». Celle-ci convient aux mécaniciens et permet d'écrire des bilans globaux sans avoir à tenir compte des propriétés locales de la matière. Par exemple, dans le cas d'un écoulement gazeux à grande vitesse (lorsque le nombre de Mach est suffisamment grand) il devient nécessaire de prendre en compte la compressibilité du gaz. La masse volumique  $\rho$  étant fonction de la pression à travers l'équation d'état du gaz  $\rho = f(p)$ , le problème de mécanique des fluides se couple à un problème de thermodynamique. Les mécaniciens ont dû intégrer ces couplages dans leur description globale de système. Dans le même temps, les physiciens ont choisi la description de la matière en se focalisant sur l'aspect local des lois de comportement. Consultons deux livres classiques écrits par M. W. Zemansky l'un destiné aux physiciens (*Heat & Thermodynamics*) et l'autre aux ingénieurs (*Basic Engineering Thermodynamics* avec H. C. Van Ness). Alors que le second utilise largement la notion de volume de contrôle et consacre un chapitre aux écoulements, pas une seule mention de ces deux notions n'est faite dans l'ouvrage pour physiciens. Le contraste entre le mode de réflexion de l'ingénieur et celui du physicien pourrait difficilement être souligné plus directement.

De façon quelque peu paradoxale, c'est justement à partir de la description d'états fluides de la matière (superfluides, cristaux liquides...) que s'est effectué le retour récent des physiciens vers les problèmes de mécanique ainsi que nous l'avons souligné en début d'article. La mécanique des fluides apparaît dans ces exemples comme très couplée à la thermodynamique et à la physique des matériaux.

## 2 DIFFICULTÉS D'UN ENSEIGNEMENT DE MÉCANIQUE DES FLUIDES

A travers ce cheminement très fragmentaire, nous avons voulu dégager quelques idées clés de la mécanique des fluides. Dans la suite, nous allons exclusivement nous intéresser à l'aspect enseignement, en regardant dans un premier temps les difficultés que nous avons pu rencontrer dans notre apprentissage d'enseignants en mécanique des fluides. Nous le ferons en examinant les problèmes que nous avons rencontré dans les deux cas limites de l'enseignement des fluides parfaits (sans viscosité) et de celui des fluides réels aux petits nombres de Reynolds (fluide visqueux). Nous montrerons ensuite les voies que nous avons utilisées pour venir à bout de ces obstacles.

### 2.1. Deux paradoxes de «l'eau sèche»

#### a) *Le tube de Venturi*

Le fluide parfait que Feynman appelle «eau sèche» pour en montrer

l'irréalité (10) se prête à des exercices simples mettant en avant les lois de bilan. Elle pose cependant à l'enseignant de nombreux pièges parce que, justement, elle ne prend pas en compte les effets de la viscosité. Ainsi, dans l'exemple de la figure 1, la vitesse tangente à la plaque est prise indépendante de la distance à celle-ci (la seule condition aux limites concerne la continuité de la composante normale).

Considérons maintenant l'expérience du tube de Venturi qui constitue un exemple, en apparence simple, d'illustration de la conservation de l'énergie pour un fluide parfait (relation de Bernoulli), mais qui nécessite une interprétation fine des résultats. Cette expérience peut être réalisée aisément avec une prise d'eau sur un robinet et un ensemble de tubes de verre. Elle est constituée d'un tube principal horizontal (figure 2) qui comporte un rétrécissement en son milieu (point B) ; les tubes verticaux soudés en différents points permettent d'avoir des prises de pression en ces points. On observe une dénivellation entre les différents tubes, la pression au point B étant plus faible qu'en A, d'autant plus que le débit est important. Quant à la pression en C, elle est intermédiaire entre celle aux points A et B. Interprétons maintenant ces résultats en nous plaçant dans l'hypothèse de fluide parfait.

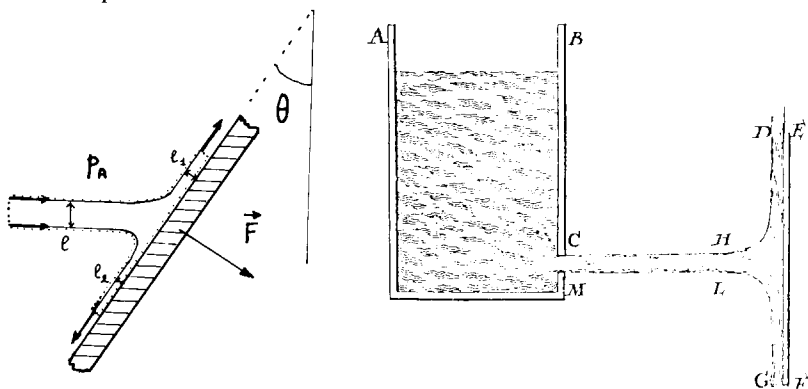


Figure 1 : Géométrie de l'expérience du jet incident sur une plaque. La notion de volume de contrôle est présente dans l'illustration tirée du livre «Hydrodynamica» (Strasbourg, 1738 fig 84) de D. Bernoulli.

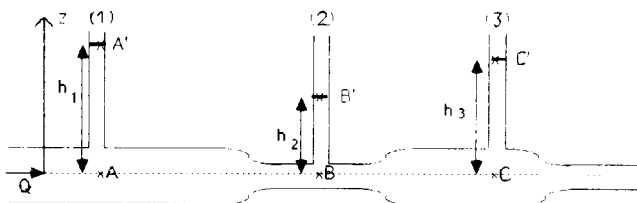


Figure 2 : Géométrie d'une expérience du tube de Venturi.

La conservation du débit (valable quel que soit le fluide) conduit à :

$$S_A V_A = S_B V_B$$

L'écriture de l'équation de Bernoulli (valable pour un fluide sans viscosité le long d'une ligne de courant et dans tout le fluide pour un champ de vitesse potentiel) donne :

$$P_A + (1/2) \rho V_A^2 = P_B + (1/2) \rho V_B^2$$

soit :

$$P_A - P_B = (1/2) \rho V_A^2 (S_A^2/S_B^2 - 1)$$

Connaissant les sections  $S_A$  et  $S_B$  du tube, la mesure de la différence de niveau entre les tubes manométriques permet de calculer la vitesse en une section du tube. Elle confirme l'analyse ci-dessus au moins qualitativement si on corrige l'effet des pertes de charge en remplaçant  $P_A$  par la demi-somme des pressions en deux prises de pression symétriques, en amont et aval de la constriction afin de compenser la perte de charge non prise en compte par un modèle de fluide parfait.

Considérons à présent la même expérience faite avec de l'hélium superfluide qui est la phase de l'hélium 4 liquide à une température inférieure à 2,17 K. On a réellement affaire à un fluide parfait qui s'écoule sans viscosité et auquel on peut appliquer la relation de Bernoulli en tous points (tout au moins tant que la vitesse d'écoulement ne dépasse pas une certaine valeur critique). Dans ce cas l'expérience du tube de Venturi n'indiquerait plus aucun dénivelé entre les tubes A et B. A la surface libre de ces deux tubes, en A' et B', on a en effet :

$$P_{A'} = P_{B'} \text{ (pression de vapeur saturante de l'hélium)}$$

$$V_{A'} = V_{B'} = 0 \text{ (il n'y a pas de débit dans les tubes de prise de pression)}$$

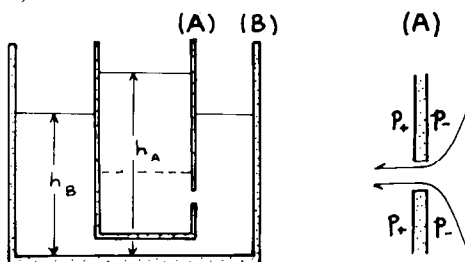
donc :

$$h_{A'} = h_{B'} \text{ et il n'y a donc pas de différence de niveau entre les tubes.}$$

Le désaccord entre les deux expériences tient à ce que l'on aurait dû tenir compte, dans le premier cas, de l'existence d'une couche limite au niveau des parois du tube où se fait l'écoulement. Le théorème de Bernoulli n'est pas applicable au travers de cette couche limite — mais seulement le long des lignes de courant. Les tubes de pression mesurent une pression presque égale à celle présente dans la région où se fait l'écoulement parce que la variation transverse de pression au travers de la couche limite reste faible.

### b) Le paradoxe de Bergeron

Imaginons un récipient A se vidant par un petit orifice dans le récipient B qui l'entoure, le niveau  $h_A$  étant supérieur à  $h_B$  (figure 3). Dans l'hypothèse d'un fluide parfait et en utilisant un volume de contrôle approprié (limité par le cylindre A, sa surface libre et le jet sortant) on peut déterminer la réaction du jet par un calcul simple mais délicat. Imaginons au contraire que le niveau  $h_A$  soit inférieur à  $h_B$  Bergeron (8) nous dit alors que la réaction sur le récipient A due au jet rentrant dans A est nulle (ce serait le problème d'un sous marin dans lequel existerait une voie d'eau !).



**Figure 3 :** Paradoxe de Bergeron. Lorsque le niveau intérieur  $h_A$  est supérieur au niveau dans le récipient extérieur  $h_B$ , il existe une réaction s'exerçant sur le récipient (A), donnée par le flux de quantité de mouvement du liquide sortant par l'orifice inférieur (A). Lorsque  $h_A < h_B$  par contre, cette réaction sur le récipient (A) est nulle. On peut comprendre la diminution de l'effet de la réaction du jet rentrant en considérant la différence de pression entre la paroi intérieure et extérieure au voisinage de l'orifice.

Le calcul peut apparemment se faire en utilisant deux volumes de contrôle respectivement juste à l'intérieur et à l'extérieur du volume correspondant au problème précédent. En fait, cinq ans de pratique de préceptorat auprès de petits groupes d'élèves de l'E.S.P.C.I. par six tuteurs ont conduit à pratiquement autant d'échecs pédagogiques tant l'ambiguïté (plus que la subtilité) de ce problème de jet est grande. Tout au plus, peut-on comprendre pourquoi le jet entrant dans le récipient A conduit à une diminution de l'effet de la réaction due au jet en regardant la diminution de la pression au voisinage des bords extérieurs du cylindre A près de l'orifice due au débit. Dans le cas du jet sortant, au contraire, l'écoulement près de la paroi intérieure du cylindre A conduit à une augmentation de l'effet de réaction du jet par rapport au cas limite d'un orifice placé à l'extrémité d'un tube rentrant à l'intérieur du cylindre A (voir à ce propos la « colle » posée dans les « lectures on physics » de Feynman (10)).

### 2.2. Les viscosités de l'eau mouillée.

La mécanique des fluides est régie par l'équation de Navier-Stokes.

$$\rho \, d\vec{v}/dt = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = - \nabla p + \vec{f} + \eta \, \Delta \vec{v}$$

Elle exprime l'équilibre entre l'accélération de l'unité de volume de fluide et les forces appliquées : pression, forces extérieures, forces dues à la viscosité  $\eta$ ). Jointe à l'équation de conservation de la masse qui, pour un fluide incompressible, s'écrit :

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

l'équation de Navier-Stokes constitue la base de tous les problèmes de la mécanique des fluides. Nous n'avons pas la prétention ni le temps de l'analyser en détail, mais nous regarderons simplement la limite des faibles nombres de Reynolds lorsque le terme non linéaire  $\rho(\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$  peut être négligé devant le terme  $\eta \Delta \vec{v}$  dû à la viscosité.

Dimensionnellement, cette inégalité s'exprime par un critère de la forme :

$$R_e = UL/(\eta/\rho) < 1$$

où U et L sont les échelles de vitesse et de longueur du problème. Nous reviendrons sur cette forme et sa signification au chapitre 3.2.

Dans ces conditions, l'équation de Navier-Stokes simplifiée, appelée alors équation de Stokes devient une équation linéaire et permet en principe la recherche de solutions uniques de la mécanique des fluides visqueux pour des conditions aux limites imposées.

Hélas pour l'enseignant, on ne connaît que très peu de solutions analytiques dans cette limite : ce sont essentiellement l'écoulement de cisaillement simple entre deux plans ou deux cylindres (dit problème de Couette) ou celui, sous un gradient de pression imposé, dans un tube cylindrique ou entre deux plans (problème de Poiseuille). Le simple problème de la chute d'une bille dans un liquide visqueux (écoulement de Stokes) conduisant à la relation classique :

$$\vec{F} = -6\pi \eta R \vec{v}$$

entre la force de friction  $\vec{F}$  et la vitesse de translation  $\vec{v}$  de la bille, a une solution exacte difficile à reproduire. La solution qui en est proposée par Landau et Lifchitz (11), pour être élégante, n'en est pas moins trop subtile pour pouvoir être discutée en cours.

Et encore, une fois résolue, cette relation de Stokes ne s'applique pas quel que soit le rayon R de la bille ! Plus précisément, à distance suffisamment grande de l'objet le champ de vitesse doit être corrigé car il apparaît une plus grande échelle de longueur dans le problème, telle que le nombre de Reynolds bâti avec cette échelle atteint des valeurs de l'ordre de l'unité. Il en

résulte une correction logarithmique de la force (dite d'Oseen) clairement hors programme.

Une difficulté majeure dans le problème de Stokes est la lente décroissance (en  $r^{-1}$ ) de la perturbation du champ de vitesse créé par un obstacle à trois dimensions qui contraste avec la variation en  $r^{-3}$  dans le cas d'un fluide parfait (cette dernière variation est la même que pour une sphère conductrice placée dans un champ électrostatique uniforme). Considérons par exemple une suspension de concentration volumique  $c$  de particules qui sédimentent. La modification de la vitesse de sédimentation due à la présence des autres particules est, même pour une suspension très diluée ( $c \ll 1$ ) un problème d'extrême difficulté.

Batchelor a proposé une solution (premier terme d'un développement en puissance de  $c$ ) :

$$V_s/V_{s0} = 1 - 6,5 c$$

où  $V_{s0}$  représente la vitesse de sédimentation d'une particule unique sous son propre poids définie par l'égalité :

$$6\pi \eta R V_{s0} = \frac{4}{3} \pi R^3 \Delta \rho g$$

(où  $\Delta \rho$  est différence de masse volumique entre la bille et le liquide).

Le signe même de l'effet de la concentration n'est pas évident (deux particules voisines isolées tomberaient en effet plus vite qu'une particule unique ce qui aurait suggéré un signe  $+$ ). Il n'est pas évident non plus qu'il ne faille pas inclure aussi des exposants non entiers (tels que  $c^{1/3}$  lié à la distance moyenne entre particules) dans le développement en puissances de  $c$ .

Nous avons brossé un tableau volontairement pessimiste de ces problèmes simples et essentiels des écoulements de fluides visqueux et parfaits, afin de mieux montrer par la suite qu'il vaut mieux se diriger vers un type d'approche radicalement différent et sans doute original par rapport aux méthodes d'enseignement traditionnelles.

### 3 LES POSSIBILITÉS D'UN ENSEIGNEMENT D'HYDRODYNAMIQUE PHYSIQUE

#### 3.1. Une science d'observation

Dans la présentation de ces difficultés nous avons omis totalement le rôle très privilégié que joue l'**observation** en mécanique des fluides. Il y a peu de domaines de la physique où on rencontre autant de phénomènes à décrire

ou à interpréter et qui se passent à notre propre échelle. Les techniques de marquage et de visualisation des écoulements sont très variées. Le recueil «An album of fluid motion» est un complément intelligemment composé de très belles visualisations de toutes sortes d'écoulements (2). L'éclairage par tranches laser permet de véritables coupes de champs d'écoulements tridimensionnels. Par ailleurs, les méthodes d'optique cohérente donnent accès au champ de vitesse (anémométrie Doppler laser) ou au gradient de vitesse (12) en tous points d'un fluide. Partant d'études cinématiques d'un écoulement et allant vers les outils physiques d'analyse, on a un spectre très large de sujets d'étude pouvant être pris en compte dans les enseignements de premier ou second cycle et de classes préparatoires.

Plus élaborée, la série de films réalisée par le «National Committee of Fluid Mechanics» américain (13) permet de pénétrer dans la compréhension fine de la mécanique des fluides qu'il s'agisse des champs de vitesse et de déformation dans les écoulements, de l'hydrodynamique aux petits nombres de Reynolds, ou des phénomènes de surface... Le livre d'accompagnement (14) est, par lui-même, un outil de travail. N'oublions pas enfin nos propres observations et découvertes de phénomènes naturels simples dont on voit quelques (insuffisants) témoignages dans les journaux de pédagogie ou encore dans la rubrique de J. Walker dans «Pour la Science».

### 3.2. L'analyse dimensionnelle

L'outil de base de la compréhension de ces phénomènes est, de façon encore plus tangible que dans d'autres domaines de la physique, l'analyse dimensionnelle. Revenons au nombre de Reynolds. Une première façon de comprendre ce nombre consiste à exprimer l'équation Navier-Stokes en termes des variables réduites telles que  $l = \text{distance}/L$  et  $t = \text{temps}/(L/U)$  ; c'est implicitement ce que faisait l'écriture que nous avons proposée plus haut (§ 2.2.). Le terme contenant la viscosité est alors remplacé par  $(1/Re)$ . Cette réduction est à la base de la compréhension des études sur modèles en mécanique des fluides respectant la même combinaison du nombre de Reynolds.

Cette approche peut être formalisée en recherchant tous les invariants indépendants possibles qui peuvent être obtenus à partir d'un nombre de variable données dont on connaît l'équation aux dimensions. Cette méthode apporte cependant peu de compréhension physique des problèmes posés au delà de l'inventaire des paramètres importants et nous semble insatisfaisante.

Une approche beaucoup intéressante est l'interprétation des nombres sans dimension comme rapports d'ordres de grandeur de paramètres physiques «analogues» (en grec, «αναλογία» - l'analogie, signifie le rapport de deux quantités de même espèce). Donnons deux exemples d'interprétation

attachés au nombre de Reynolds  $Re$ . Regardons l'écoulement de vitesse caractéristique  $U$  autour d'un obstacle d'échelle de taille  $L$  ; nous écrivons le nombre de Reynolds comme un rapport de deux temps caractéristiques, sous la forme :

$$Re = (L/U) / (L^2/(\eta/\rho)) = t_c/t_d$$

où  $t_c = L/U$

est le temps de convection d'une perturbation sur l'échelle de taille  $L$  de l'obstacle, et :

$$t_d = L^2/(\eta/\rho) = L^2/\nu$$

est le temps de diffusion d'une perturbation de la vitesse sur la même distance  $L$ . Le rapport  $\nu = \eta/\rho$  est la viscosité cinématique qui a la dimension en  $[L^2 T^{-1}]$  d'un coefficient de diffusion et joue pour les fluctuations du champ de vitesse, un rôle comparable à la diffusion moléculaire pour les fluctuations de masse.

Aux petites valeurs du nombre de Reynolds ( $t_d < t_c$ ), les fluctuations de vitesse sont atténuées - gommées - rapidement par la viscosité et l'écoulement est laminaire.

Aux grands nombres de Reynolds, au contraire ( $t_d \gg t_c$ ), les fluctuations accidentelles de la vitesse qui sont peu atténuées s'ajoutent dans la construction d'une traînée turbulente en aval de l'obstacle.

Dans une approche voisine, le nombre de Reynolds peut être interprété comme un rapport de deux contraintes sous la forme :

$$Re = \rho U^2/(\eta U/L)$$

$\eta U/L$  est la forme traditionnelle de la contrainte de cisaillement visqueux ; le numérateur est un flux d'impulsion  $\rho \vec{v}$  par unité de surface et de temps. Aux grands nombres des Reynolds, le rapport de la force de traînée exercée sur un obstacle à la quantité de même dimension  $\rho U^2 S$  ( $S$  surface de l'obstacle perpendiculaire à la vitesse  $U$ ) est le  $C_x$  classique des automobiles qui caractérise les qualités d'aérodynamisme.

En pratique, tous les nombres sans dimension effectivement utiles peuvent être obtenus à partir de rapports de quantités physiques (souvent des temps, mais aussi des forces ou des contraintes) plutôt que par l'utilisation du formalisme des équations aux dimensions.

Un tel exercice se prête particulièrement bien à des solutions de problèmes d'écoulement aux faibles  $Re$  dont nous avons souligné les difficultés de recherche de solutions exactes. Elles utilisent de plus les propriétés de base de l'équation de Stokes (unicité des solutions, réversibilité, minimum de dissipation d'énergie pour la solution) et conduisent alors à des solutions raisonnables («aux  $2\pi$  près») et à la possibilité de prise en compte de la richesse des mécanismes mis en jeu dont témoigne en particulier le film de Taylor (13).

### 3.3. Quelques problèmes simples de mécanique des fluides

La pédagogie traditionnelle sanctionnée par des examens et concours se prête assez mal à ce type d'approches, ce qui est fort dommage car ce sont elles que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique. Il est cependant possible de construire un enseignement se prêtant à des exercices quantitatifs dans l'esprit des autres enseignements de physique. Nous en citons deux exemples : le fluide parfait déjà discuté ici et la physique du tourbillon, que l'on peut rattacher à deux sujets de l'électromagnétisme : l'électrostatique (ou l'électrocinétique) et le magnétisme des courants.

#### *a) Le fluide parfait*

Nous avons mis en garde le lecteur contre l'utilisation faussement aisée des lois de conservation. Elles restent cependant un outil utile si on n'oublie pas qu'elles s'appliquent à un écoulement à l'extérieur des couches limites dont la portée spatiale autour d'un obstacle est d'autant plus réduite que le nombre de Reynolds est élevé. On utilisera donc les méthodes du fluide parfait toutes les fois que l'on doit analyser un écoulement pas trop près d'un obstacle ou encore à fréquence suffisamment élevée (temps court) pour que la diffusion de la perturbation de vitesse par l'obstacle soit limitée au voisinage de la paroi.

Deux situations particulièrement simples utilisent par ailleurs les solutions des fluides parfaits : l'écoulement entre deux plaques parallèles proches, entre lesquelles on peut placer un obstacle de dimension grande devant la distance entre les plaques (problème de Hele-Shaw décrit dans l'encart 2) et l'écoulement permanent dans un milieu poreux (problème de Darcy (15)). Dans les deux cas, l'écoulement local est contrôlé par la viscosité (écoulement de Poiseuille). Mais l'équation du débit moyen (intégré sur la distance entre les plaques ou sur une section de quelques tailles de canaux du milieu poreux) intègre l'effet de la viscosité dans un préfacteur (la perméabilité), ce qui conduit à une loi de proportionnalité entre le débit et le gradient de pression. On a donc paradoxalement un problème de type potentiel qui permet une analogie directe avec les résultats de l'électrostatique et la plus large utilisation des méthodes de résolution de l'équation de Laplace à deux et trois dimensions.

### b) Le tourbillon

Du maelström à la vidange d'une baignoire (16), le tourbillon est un phénomène d'observation courante et une caractéristique classique des écoulements de fluides ; il est de plus à la base de la compréhension qualitative de la turbulence.

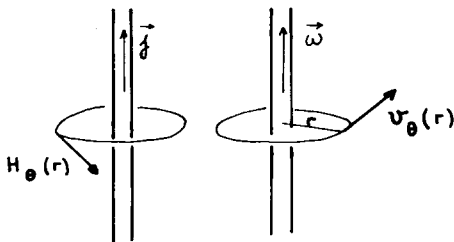


Figure 4 : Comparaison entre la distribution de vitesse autour d'un tube de tourbillon et d'excitation magnétique autour d'un tube de courant.

Le champ de vitesse et la dynamique d'une ligne tourbillon sont en correspondance directe avec le problème du magnétisme des courants. La figure 4 présente côte à côte une ligne de tourbillon et un fil conducteur parcouru par un courant. La première crée un champ de vitesse :

$$v(r) = C/(2\pi r)$$

où  $C$  est une constante qui caractérise la «force» du tourbillon. Cette forme du champ de vitesse exprime en fait la conservation du moment cinétique dans le cas d'un fluide parfait pour une particule de fluide de vitesse  $\vec{v}$  et située à la distance  $r$  de l'axe du tourbillon. Elle traduit également la propriété de cet écoulement d'être irrotationnel partout ( $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ ) sauf sur la ligne tourbillon (cœur du tourbillon) où est concentrée la vorticité (dans une situation réelle, la vorticité est en fait concentrée dans un tube de courant centré sur la ligne). La correspondance avec le magnétisme des courants associe au champ de vitesse  $\vec{v}$  la densité de courant  $\vec{j}$ , et à la vorticité  $\vec{\omega}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ , le champ d'excitation magnétique  $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{j}$ . En particulier, la relation de Biot et Savart a un équivalent en hydrodynamique qui permet de déterminer le champ de vitesse d'un écoulement tourbillonnaire dont on connaît la distribution de vorticité (par exemple, la dynamique des tourbillons courbes utilise directement cette relation Biot et Savart).

## 4. CONCLUSION : L'HYDRODYNAMIQUE PHYSICOCHEMIQUE [17]

Nous avons tenté de montrer que, pour dépasser les difficultés de l'enseignement de la mécanique des fluides, il faut sortir des schémas

classiques de nos enseignements de physique et rechercher une démarche plus proche de celle de la vie courante, basée sur l'observation, l'analyse dimensionnelle et les ordres de grandeur... La variété des outils expérimentaux qui apparaissent actuellement couple fortement la mécanique des fluides aux autres disciplines de la physique. Enfin l'étude des écoulements potentiels et tourbillonnaires - deux des composants essentiels du puzzle de la mécanique des fluides - rapproche cet enseignement de celui - classique - de l'électromagnétisme.

Jusqu'à présent, nous avons présenté une vision trop «transparente» des fluides en oubliant la nature du matériau constituant le fluide. L'hydrodynamique physicochimique prend au contraire en compte les propriétés de la matière liquide et les interactions physicochimiques dans cette matière en écoulement. Parler d'un liquide déterminé est souvent bien plus que de donner simplement sa viscosité ou sa masse volumique. L'étude de l'hélium superfluide, de phases de cristaux liquides (nématiques, smectiques...), de solutions de polymères, de suspensions, implique un aller et retour entre la structure microscopique et les lois de comportement macroscopiques, bien dans l'esprit de l'approche des physicochimistes. Cette approche matériaux peut, dans de nombreux cas, être un complément pédagogique important pour l'enseignement de la mécanique des fluides. Enfin cette étude de l'hydrodynamique physicochimique, avec sa prise en compte de la richesse des comportements rhéologiques de la matière est au cœur de très nombreuses technologies modernes et de recherches appliquées actuelles (opérations du génie chimique, tribologie, lubrification, collage, polymères en solution et fondus, cristaux liquides, mouillage,...).

## ENCART N° 1

### JET DE LIQUIDE INCIDENT SUR UNE PLAQUE

Nous supposons le problème à deux dimensions. Le jet incident a une largeur  $l$  et une vitesse  $v$ . Appliquons les lois de conservation à la surface définie sur la figure. La relation de Bernoulli s'écrit le long d'une ligne de courant :

$$p + \rho v^2/2 + \rho g z = \text{cte}$$

En deux points tels que A et B, hors des zones de courbure du jet, on a  $p = p_{\text{atmosphérique}}$ . On peut négliger les variations de dénivelé  $z$  et, par suite,  $v$  est uniforme. La conservation du débit par unité de largeur suivant  $y$  donne immédiatement :

$$1 = 1_1 + 1_2 \quad (1)$$

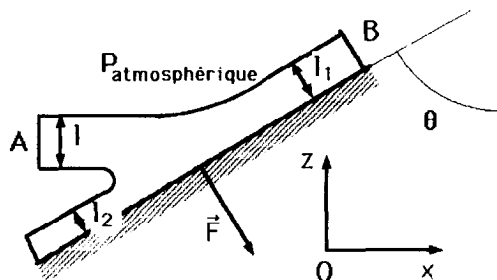


Figure 5

Enfin, l'équation de conservation de l'impulsion peut s'écrire sous une forme générale : le flux de la quantité de mouvement sortant d'un volume fini  $V$  est égal à la somme des forces appliquées à la surface par la matière qui l'entoure et des forces en volume. Dans le cas présent, le dernier terme est nul (on néglige l'effet du poids sur un petit volume) et on obtient les deux équations donnant la force :

$$\rho v^2 l \cos\theta = F \quad (2)$$

$$\rho v^2 (l \sin\theta - l_1 + l_2) = 0 \quad (3)$$

d'où, en combinant les équations :

$$l_1 = l (1 + \sin\theta)/2$$

et

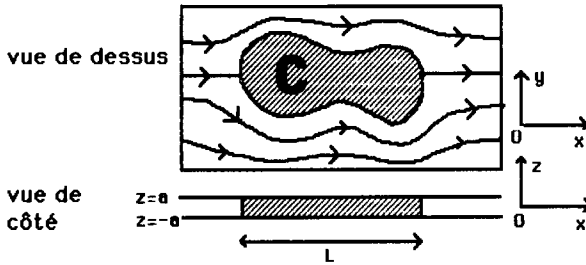
$$l_2 = l (1 - \sin\theta)/2$$

## ENCART N° 2

### LA CELLULE DE HELE-SHAW

Une cellule de Hele-Shaw est constituée de deux plaques parallèles très proches (distance  $2a \ll$  taille  $L$  des plaques) entre lesquelles sont placées des cales  $C$  d'épaisseur  $2a$  simulant des formes d'obstacles.

Ce système est utilisé pour reproduire des champs de vitesse d'écoulements potentiels bidimensionnels de fluides parfaits autour d'obstacles. Ce résultat semble au premier abord paradoxal puisque, étant donnée la proximité des plaques, les forces de frottement visqueux joueront un rôle essentiel sur les caractéristiques de l'écoulement. Un résultat semblable sera observé dans les matériaux poreux.



**Figure 6 :** Cellule de Hele Shaw. L'écoulement moyen bidimensionnel vu au dessus de la cellule est potentiel à des échelles supérieures à  $2a$ .

Entre les plaques, l'écoulement est pratiquement parallèle au plan  $xy$  et on a donc :  $v_z \approx 0$ . Donc la composante suivant  $Oz$  de l'équation de Navier-Stokes se ramène à  $\partial p / \partial z \approx 0$ . Enfin, les échelles de longueur suivant  $Oz$  ( $a$ ) sont très inférieures à celles suivant  $Oy$  ( $L$ ). Cette inégalité se reflète dans les valeurs relatives des dérivées des composantes de la vitesse d'où :

$$\partial^2 v_x / \partial y^2 \ll \partial^2 v_x / \partial z^2 \quad \partial^2 v_x / \partial x^2 \ll \partial^2 v_x / \partial z^2$$

et

$$\partial^2 v_y / \partial y^2 \ll \partial^2 v_y / \partial z^2 \quad \partial^2 v_y / \partial x^2 \ll \partial^2 v_y / \partial z^2$$

Par ailleurs, les termes en  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  sont négligeables puisque seules les composantes en  $\partial / \partial z$  du gradient sont importantes et que  $v_z \propto 0$  ; l'équation de Navier-Stokes se ramène donc à deux composantes :

$$\eta \partial^2 v_x / \partial z^2 = -\partial p / \partial x$$

et

$$\eta \partial^2 v_y / \partial z^2 = -\partial p / \partial y$$

ou, sous forme vectorielle :

$$\eta \partial^2 \vec{v}_2 / \partial z^2 = -\vec{\nabla}_2 p$$

L'indice 2 indique que seules les composantes suivant  $Ox$  et  $Oy$  de la vitesse et du gradient doivent être prises en compte.

Au vu de l'équation précédente, on peut séparer les variables en écrivant :

$$\vec{v}_2(z) = \vec{v}_2(x, y, 0) f(z)$$

où la variation de  $\vec{v}_2$  avec  $x$  et  $y$  est très lente par rapport à celle de  $f(z)$  avec  $z$ . Donc la **direction** de la vitesse est en tout point parallèle à celle de  $\vec{\nabla} p$  et

**ne varie pas sur l'épaisseur de la lame de fluide** même si le **module** de  $\vec{v}$  dépend beaucoup de  $z$ . On obtient :

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(x, y, 0) (1 - z^2/a^2)$$

$$\vec{v}_2(x, y, 0) = - (a^2/2\eta) \vec{\nabla}_2 p \quad v_z(x, y, 0) = 0$$

On a donc, à deux dimensions :

$$\vec{\text{rot}}_2 v(x, y, 0) \propto \vec{\text{rot}}_2 \vec{\nabla} p = 0$$

Les lignes de courant dans des plans  $z = \text{cte}$  sont donc les mêmes pour les différentes valeurs de  $z$  et, d'après l'équation précédente, elles seront indentiques à celles d'un écoulement potentiel bidimensionnel de fluide parfait autour d'obstacles de la même géométrie que les cales. Elles correspondront également aux lignes de champ (ou de courant) électrique dans un problème d'électrocinétique dans un milieu conducteur à deux dimensions où l'obstacle  $C$  est remplacé par un isolant.

Près des cales, on a une condition aux limites de vitesse nulle mais son influence se limitera à une distance de l'ordre de  $a$  par rapport à sa surface.

## RÉFÉRENCES

- [1] Dynamique des fluides édité par R. Balian et J.L. Peube, Gordon Breach (1977).
- [2] An album of fluid motion M. Van Dyke ; The Parabolic Press, Stanford (1982).
- [3] M. Couette «Études sur le frottement des liquides», Thèse soutenue le 30 mai 1890 à la Faculté des Sciences de Paris.
- [4] H. Bénard «Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent», Thèse soutenue le 15 mars 1901 à la Faculté des Sciences de Paris.
- [5] The scientific papers of G.I. Taylor, édité par G. K. Batchelor (Cambridge University Press).
- [6] L'ordre dans le chaos P. Bergé, Y. Pomeau & C. Vidal. Hermann (1984).
- [7] L. Petit, E. Guyon, R. Blanc Bulletin de la Société Française de Physique, N° 64, p.29 Avril 1987.

- [8] An introduction to fluid dynamics, G. K. Batchelor, Cambridge University Press (1967).  
Aussi : Dynamique des fluides, I. L. Rhyming, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne (1985).
- [9] W. G. Vicenti dans *Technology & Culture* **23**, 145 (1982).
- [10] R. Feynman, R. Leighton & M. Sands. Le cours de physique de Feynman, Tome 2 - deuxième partie - Interéditions - chapitres «L'écoulement de l'eau sèche», «L'écoulement de l'eau mouillante».
- [11] Mécanique des Fluides, L. Landau & I. F. Lifchitz ed. Mir (1971). Chapitres I, II, IV.
- [12] M. Fermigier, P. Jenffer, J.C. Charmet & E. Guyon, *J. de Phys. Lett.* **41**, L519 (1980).  
Les techniques d'anémométrie Doppler Laser et de strophotométrie laser (mesure des gradients de vitesse) ont fait l'objet des problèmes de concours d'entrée à l'ESPCI en 1983 et 1980.
- [13] Un grand nombre de films sur les écoulements des fluides (en particulier ceux présentés dans la référence (14) sont accessibles au S.F.R.S. Bd Raspail (Paris). Citons en particulier : écoulements à bas nombres de Reynolds, turbulence, effets de surface en mécanique des fluides, champs de vitesse et de pression dans les fluides, instabilités dans les écoulements.
- [14] Illustrated experiments in fluid mechanics, The National Comittee in Fluid Mechanics ; book of film notes, MIT Press (1972).
- [15] Le Courrier du CNRS, Image des Matériaux, Supplément au N° 66, p.38.
- [16] E. Guyon & L. Petit, *Eur. J. of Physics* **2**, 32 (1981).
- [17] E. Guyon, J.P. Hulin & L. Petit. *Hydrodynamique Physique - Interéditions* (1990).