Les cadrans solaires :

LEUR CALCUL ET LEUR CONSTRUCTION

par Claude GARINO,
L.E.G.T. E.-Herriot, 10300 Sainte-Savine.

Prends garde à la dernière !

Elles blessent toutes, la dernière tue.

Souviens-toi que je sers à marquer l'heure que tu perds.

Sans le soleil je ne suis rien, et toi sans Dieu, tu n'es rien.

Ce sont quelques devises (ou leur traduction) portées fréquemment sur les cadrans solaires qui ornent les façades d'églises, de monuments, ou de maisons.

INTRODUCTION.

La Science des cadrans solaires s'appelle la gnomonique.

Les cadrans solaires sont des appareils rudimentaires qui fournissent par lecture directe l'heure solaire vraie locale.

Un cadran se compose généralement d'une surface plane, parfois cylindrique ou sphérique sur laquelle des lignes sont tracées, et d'une tige ou d'un écran percé d'un trou, qui portent leur ombre sur la surface.

On n'envisage que le cas des cadrans plans équatoriaux, horizontaux ou verticaux.

Le tracé des lignes sur le plan du cadran sera effectué géométriquement ou mathématiquement et dans le cas de cadrans solaires tels que les horizontaux ou verticaux non déclinants, la construction pourrait être utilisée avec profit en collège par le professeur d'E.M.T. en collaboration avec le professeur de Sciences physiques.

On insistera enfin sur le moyen d'utiliser le cadran puisque son indication ne correspond pas à l'heure légale en vigueur.

Nous verrons pourquoi, et l'on donnera la valeur de la correction nécessaire. On pourra alors vérifier le cadran solaire, et ensuite l'utiliser réellement avec plaisir.

Un court chapitre indiquera aussi la construction d'une « méridienne » sur le cadran.

I. DIFFERENTS TYPES DE CADRANS SOLAIRES PLANS.

Il faut d'abord distinguer deux types fondamentaux de cadrans :

1. **Le style** ou la tige dont l'ombre est portée sur le cadran est **perpendiculaire au plan du cadran qui est horizontal.**

On appelle cela un gnomon, et c'est le type le plus ancien, un obélisque le constituait (fig. 1).

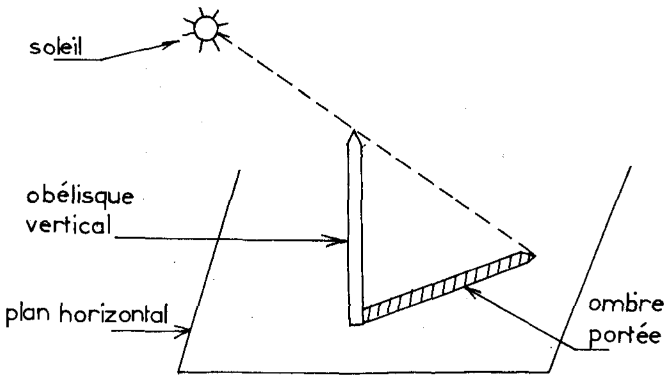


Fig. 1. — Principe du gnomon.

Un trou aménagé dans un mur ou dans un vitrail d'église, laisse passer la lumière solaire ; formant une tache lumineuse qui se déplace sur le sol à l'intérieur du monument, constitue un gnomon.

C'est, dans ce cas, une simple méridienne donnant le midi solaire vrai qui est tracée (église Saint-Sulpice à Paris, ou chapelle de l'ancien hôpital de Tonnerre - Yonne) ou même seulement l'endroit où se trouve la tache à midi, le jour du solstice d'été (cathédrale de Chartres) (1).

---

(1) Le cadran analemmatique, de forme elliptique sur un plan horizontal possède aussi un style perpendiculaire au plan, style que l'on place suivant l'époque de l'année en des points précis.

2. Le style est parallèle à l'axe Nord-Sud de rotation de la terre :

C'est le type le plus fréquent. Le plan sur lequel se projette l'ombre peut alors occuper plusieurs positions.

a) Le plan est perpendiculaire au style. Il est donc parallèle au plan équatorial terrestre. *Le cadran est dit équatorial* (fig. 2).

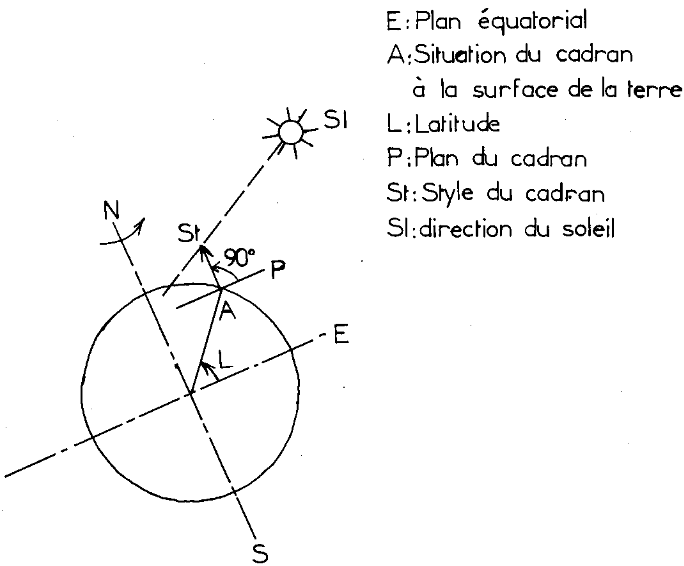


Fig. 2. — Cadran équatorial.

M. D. TOUSSAINT a proposé la construction d'un tel cadran dans le B.U.P. n° 640 (janvier 1982). Il est très simple puisque les lignes horaires consécutives font entre elles un angle constant égal à 15 degrés $\left(\frac{360}{24}\right)$.

Les fig. 4 *a*) et 4 *b*) donnent le principe de construction.

Le plan du cadran forme avec le plan horizontal un angle égal au complément de la latitude du lieu.

En été, l'ombre portée est au-dessus du plan.

En hiver, elle est en dessous.

C'est alors l'inconvénient de ce cadran : il est en effet inutilisable aux dates voisines des équinoxes.

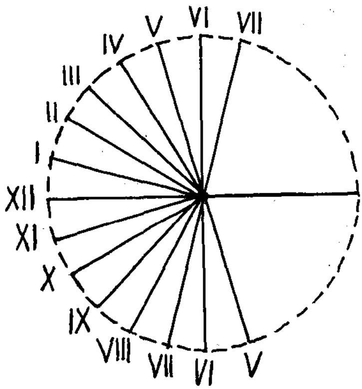


Fig. 3. — Tracé d'un cadran équatorial.

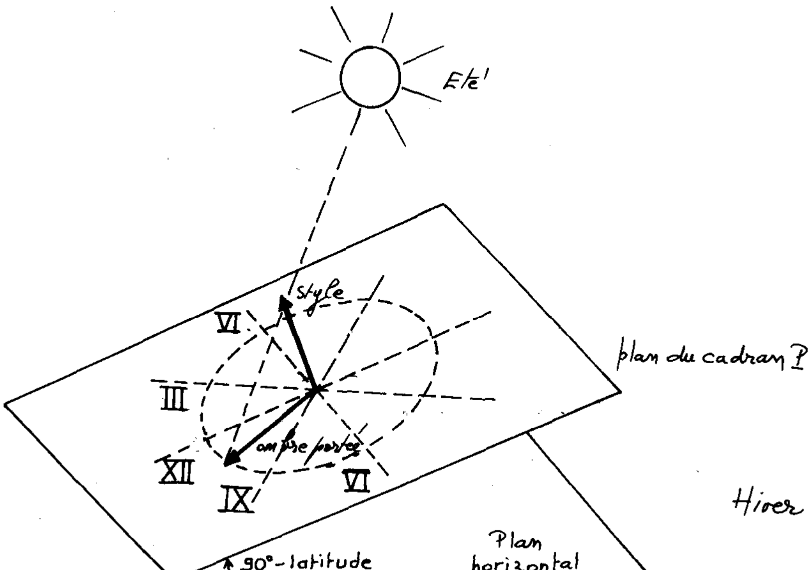


Fig. 4 *a*). Position du cadran équatorial. Le plan méridien du lieu doit être confondu avec le plan formé par le style et la direction de midi (sur P).

b) *Le plan est horizontal* (fig. 5).

Les angles entre lignes horaires dépendent de l'heure et de la latitude du lieu.

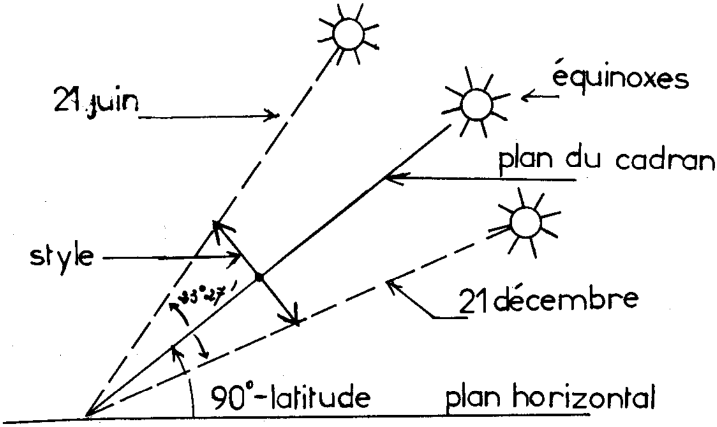


Fig. 4 *b*). — Position du cadran équatorial.

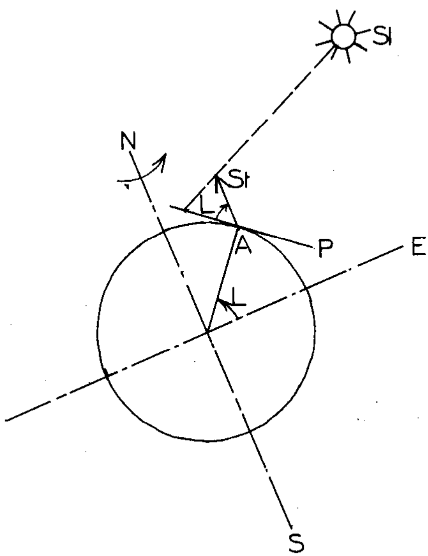


Fig. 5. — Cadran horizontal.

Ce cadran peut se rencontrer sur un édicule (parc, jardin), sur le sol ou le rebord d'une fenêtre !

c) *Le plan est vertical* (fig. 6).

C'est le type de cadran le plus fréquemment rencontré sur les façades.

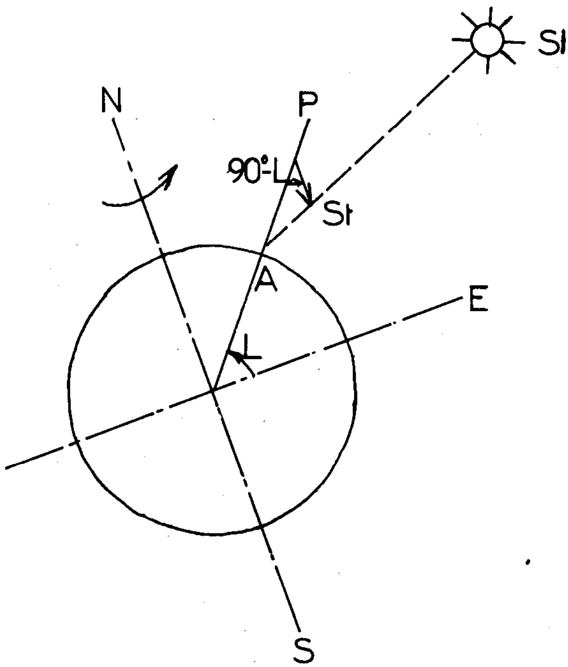


Fig. 6. — Cadran vertical.

Il faut distinguer les cas suivants :

α) Le plan du cadran est orthogonal au plan du méridien terrestre passant par le lieu.

Le cadran est dit « *vertical non déclinant* » ou encore « plein Sud ».

β) Le plan du cadran est confondu avec celui du méridien. Le cadran peut être alors tracé vers l'est ou vers l'ouest.

Correspondent les cadrans « *déclinant plein est* » (ou du matin) et les cadrans « *déclinant plein ouest* » (ou du soir).

γ) Le plan vertical du cadran est quelconque. Il est dit tout simplement « *déclinant* ».

d) Le plan du cadran est perpendiculaire au plan du méridien, face au sud, parallèle à l'axe de rotation de la terre. Le style est donc parallèle au cadran qui est qualifié de *cadran polaire* (fig. 7).

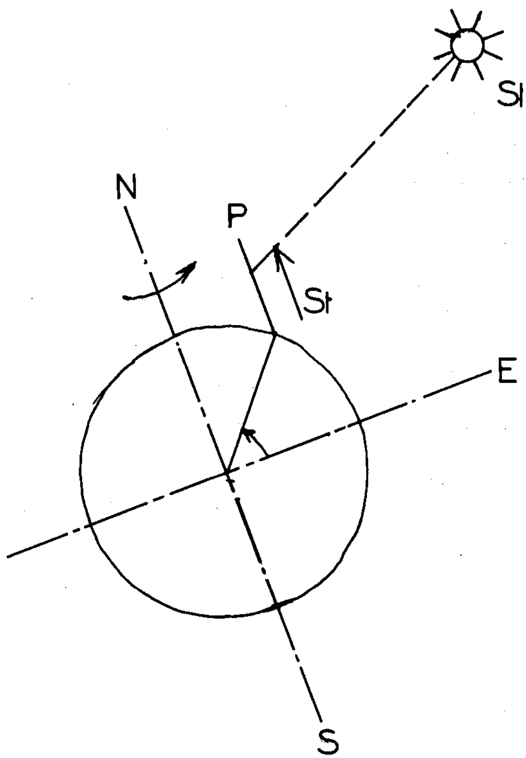


Fig. 7. — Cadran polaire.

Les lignes horaires sont parallèles entre elles.

II. UN PEU D'HISTOIRE.

D'après la bible, dès le 14e siècle av. J.-C., les Chaldéens, puis les Egyptiens auraient utilisé un bâton ou un obélisque vertical constituant un gnomon pour repérer le mouvement apparent du Soleil.

L'invention du cadran solaire est attribuée à ANAXIMANDRE, savant de l'école ionienne du 6e siècle av. J.-C.

L'usage s'en répandit en Grèce et le premier cadran introduit à Rome le fut par Papirus CURSOR en 293 av. J.-C.

Appelés Solarium ou Sciothericum horologium, les cadrans se multiplièrent sur les places publiques, et sur les façades des temples ; les citoyens les plus riches en faisaient installer sur leur villa.

VITRUVE a donné la description de la plupart des cadrans de l'époque sans en laisser la théorie.

Ce sont les astronomes de l'école d'Alexandrie au 2e siècle qui en formulent scientifiquement la théorie reprise plus tard par un Celte au 8e siècle, BÈDE LE VÉNÉRABLE.

A l'époque moderne, c'est le jésuite CLAVIUS qui fournit le premier traité complet de gnomonique au 16e siècle.

Depuis, de nombreux cadrans ont été construits, poursuivant leur développement parallèlement aux horloges à liquides et mécaniques : cadrans plans, sphériques, et même portatifs, telle la montre solaire des bergers pyrénéens.

III. CONSTRUCTION D'UN CADRAN SOLAIRE HORIZONTAL.

Tout cadran plan est homothétique du cadran équatorial.

Il suffira de projeter la construction du cadran équatorial sur le plan choisi, selon la direction des rayons solaires, les lignes horaires seront donc les intersections des plans orthogonaux au plan du cadran équatorial et contenant la direction du style et celle du Soleil, avec le plan du cadran à construire.

1. Construction du cadran à l'aide d'un cadran équatorial auxiliaire (fig. 8).

On trace la ligne O - XII sur le plan horizontal, intersection de celui-ci avec le plan méridien.

On place le style formant avec cette ligne un angle égal à la latitude L du lieu.

On situe le cadran auxiliaire perpendiculairement à la direction du style. Ses lignes horaires font entre elles des angles égaux à 15°.

On prolonge ces lignes jusqu'à ce qu'elles coupent le plan horizontal en B_0, B_1, B_2,...

Les lignes horaires du cadran horizontal sont les droites OB_0, OB_1, OB_2,...

2. Construction géométrique.

Sur le plan du cadran, bois, matière plastique (polystyrène), ou mieux dalle de pierre qui sera placée à environ 0,80 m du sol dans un endroit ensoleillé été comme hiver (penser aux ombre des bâtiments ou des arbres) ; on trace une ligne de bas en haut, ce sera la ligne O - XII du cadran (fig. 9) ; soit $y'y$.

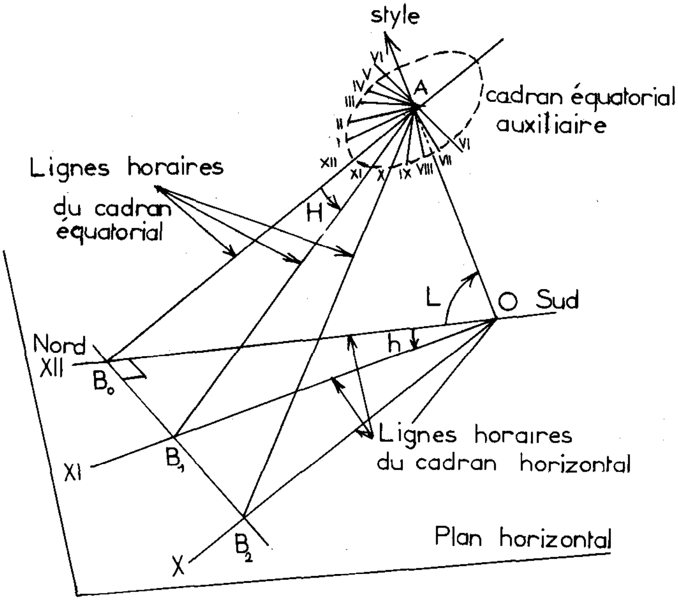


Fig. 8. — Construction d'un cadran horizontal à l'aide d'un cadran équatorial (le point C utile à la construction de la fig. 9 est placé sur l'axe OB_0, à la distance $CB_0 = AB_0$ de B_0).

Tracer la perpendiculaire $x'x$ en O, ce sera la ligne horaire VI (6 heures du matin) - VI (6 heures du soir).

On obtiendra les autres lignes horaires de la façon suivante :

Tracer un angle $y'Oz$ égal à la latitude L du lieu. Choisir sur Oz un point A tel que OA soit égal à la longueur du style.

A partir de A, tracer la perpendiculaire à Oz. Elle coupe $y'y$ en B_0 ; mesurer la longueur AB_0 et la reporter sur B_0y'. On obtient le point C (fig. 9).

Tracer en B_0 la perpendiculaire à $y'y$. C'est la ligne des équinoxes sur laquelle se trouvera l'extrémité de l'ombre du style aux dates des équinoxes, à toute heure.

Tracer un cercle de centre C et de rayon B_0C (ce rayon pourrait être quelconque) et des rayons faisant entre eux des angles égaux à 15°, de part et d'autre de la ligne $y'y$, ce qui revient à utiliser un cadran équatorial auxiliaire.

En effet, il revient au même, pour déterminer B_1, B_2,..., de tracer les droites AB_1, AB_2,... ou CB_1, CB_2,... (fig. 8).

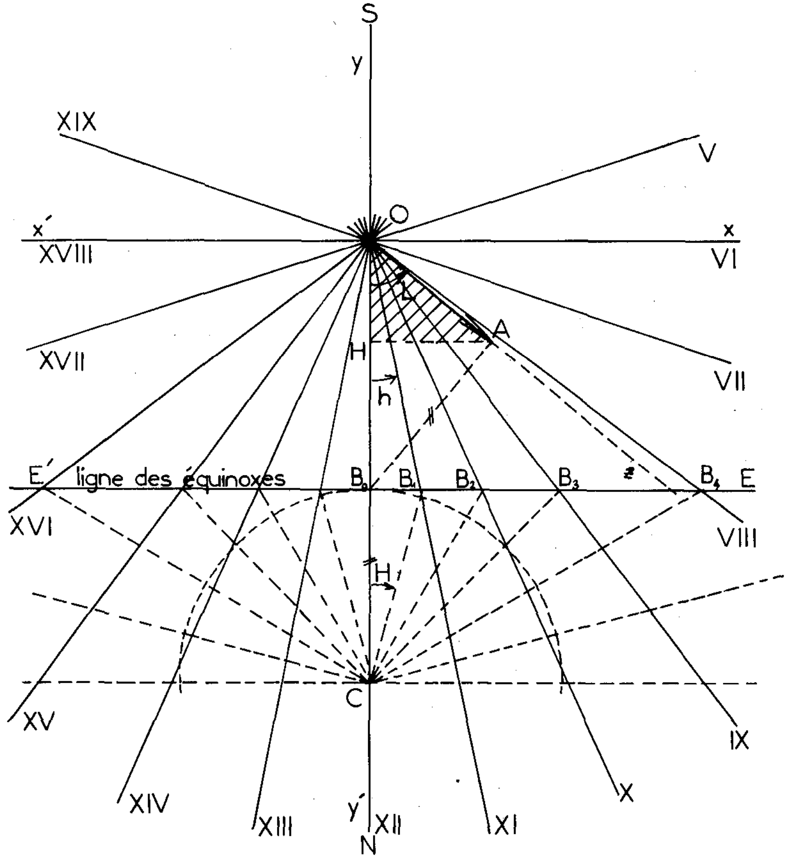


Fig. 9. — Tracé d'un cadran solaire horizontal ; L est la latitude, le triangle OAH représente le style à plat. En réalité, il sera perpendiculaire au plan du cadran (c'est-à-dire que le triangle OAH doit être tourné de 90° autour de OY').

Elles coupent la ligne des équinoxes aux points B_0, B_1, B_2, etc., où passent les lignes horaires cherchées, issues de O. On peut, bien entendu, ajouter les lignes des demi-heures en traçant les rayons intermédiaires, faisant entre eux des angles de 7,5 degrés.

Le style sera une tige à placer dans un plan perpendiculaire au cadran faisant, avec la ligne O - XII, un angle égal à L. Sa longueur sera, rappelons-le, OA = *l*.

Il peut être figuré par une plaque triangulaire qui apparaît sur la construction en abaissant depuis A la perpendiculaire à *y'y* (fig. 10).

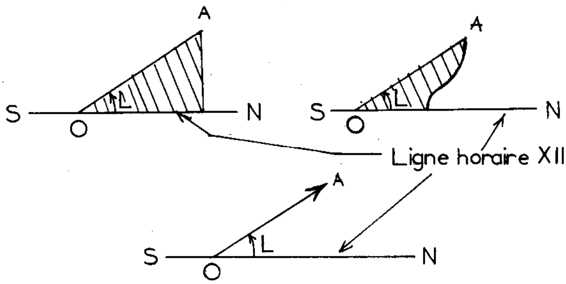


Fig. 10. — Différents styles pour un cadran horizontal.

3. **Cadran des angles des lignes horaires du cadran horizontal** (fig. 8 et 9).

Chaque ligne horaire fait un angle h avec la ligne du midi O-XII, $y'y$ tel que :

$$\boxed{\operatorname{tg} h = \sin L \cdot \operatorname{tg} H} \qquad [1]$$

L : latitude du lieu.

H : angle horaire du Soleil (fig. 8 et 9).
C'est aussi l'écart entre le plan méridien contenant le Soleil et le plan méridien du lieu, et c'est l'angle que fait la ligne horaire correspondante avec la ligne O-XII sur le cadran équatorial, soit 15° par heure.

Les valeurs de H seront donc de 15° pour les lignes XI et I ; 30° pour X et II ; 45° pour IX et III, etc.

La démonstration de cette formule est donnée en annexe 1.

Exemple : à Paris : L + 48° 50' ; sin L = 0,753.

heures	H degrés	tg H	tg h	h degrés
12 h	0	0	0	0
11 h 30 - 12 h 30	7° 5'	0,132	0,099	5° 39'
11 h - 13 h	15°	0,268	0,201	11° 24'
10 h 30 - 13 h 30	22° 50'	0,414	0,312	17° 15'
10 h - 14 h	30°	0,577	0,435	23° 29'
9 h 30 - 14 h 30	37° 5'	0,767	0,578	30° 00'
9 h - 15 h	45°	1,000	0,753	36° 58'
8 h 30 - 15 h 30	52° 5'	1,303	0,981	44° 27'
8 h - 16 h	60°	1,732	1,304	52° 31'
7 h 30 - 16 h 30	67° 5'	2,414	1,818	61° 11'
7 h - 17 h	75°	3,730	2,810	70° 24'
6 h 30 - 17 h 30	82° 5'	7,595	5,720	80° 04'
6 h - 18 h	90°	∞	∞	90°

IV. CONSTRUCTION D'UN CADRAN SOLAIRE VERTICAL.

Rappelons que le cadran peut être déclinant ou non ; mais quelque soit le plan choisi, un cadran équatorial auxiliaire peut être utilisé.

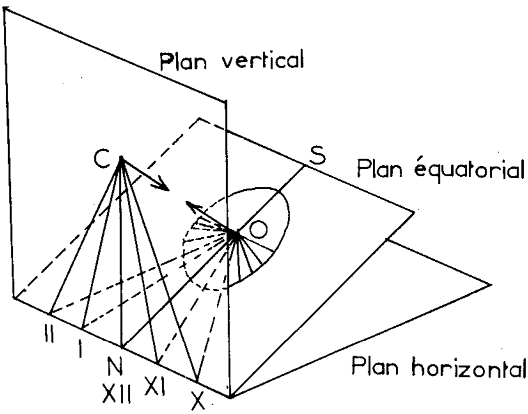


Fig. 11. — Principe de construction d'un cadran vertical non déclinant.

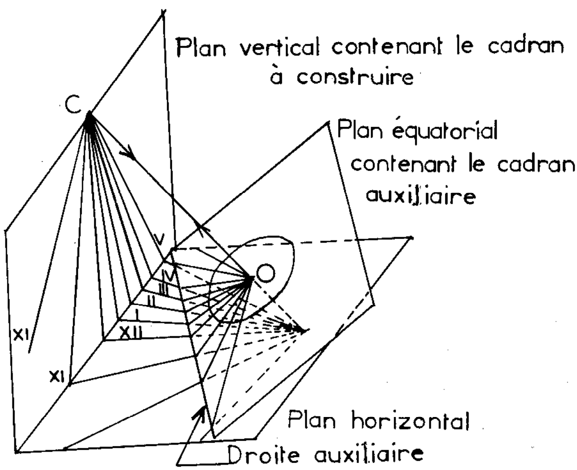


Fig. 12. — Principe de construction du cadran vertical déclinant.

La construction géométrique du cadran non déclinant est strictement la même que celle du cadran horizontal ; en transformant l'angle L de la latitude en son complément 90° - L.

La ligne $y'y$ est verticale.

La formule donnant la position d'une ligne horaire devient :

$$\boxed{\operatorname{tg} h = \cos L \cdot \operatorname{tg} H} \qquad [2]$$

On remarque que le tracé est identique pour un tel cadran vertical et pour le cadran horizontal en un lieu où la latitude vaut 45° (parallèle passant vers Bordeaux ou Valence en France).

La fig. 14, page 53, donne le tracé complet d'un cadran déclinant orienté vers l'ouest. Les calculs sont développés dans le paragraphe V.

La formule permettant de calculer la valeur de l'angle h est la suivante :

$$\boxed{\operatorname{tg} h = \frac{\cos L}{\sin A \ \operatorname{cotg} H + \cos A \ \sin L}} \qquad [3]$$

où l'angle A est l'azimut du plan du cadran, c'est-à-dire son écart en degrés, avec le plan méridien local. Pour la démonstration, voir le paragraphe V ou l'annexe 4 (pour la définition de A, fig. 13).

On a :

$A = 90°$: pour un cadran non déclinant (on retrouve alors immédiatement [2]).

$A < 90°$: pour un cadran orienté vers l'Est.

$A > 90°$: pour un cadran orienté vers l'Ouest.

$A = 0°$ ou $180°$: pour les cadrans plein Est ou plein Ouest.

On a alors $\operatorname{tg} h = \pm \operatorname{cotg} L$: les lignes sont parallèles.

Remarques.

A écarts horaires H égaux par rapport au midi, les valeurs de h sont différentes le matin et le soir.

Les cadrans déclinants ne sont donc pas symétriques (comparer les fig. 9 et 14).

V. CALCUL NUMERIQUE D'UN CADRAN SOLAIRE.

1. Rappel des notations utilisées (fig. 13).

La méthode sera valable pour tout cadran vertical ; on indiquera à la fin du paragraphe les modifications à effectuer pour calculer un cadran horizontal.

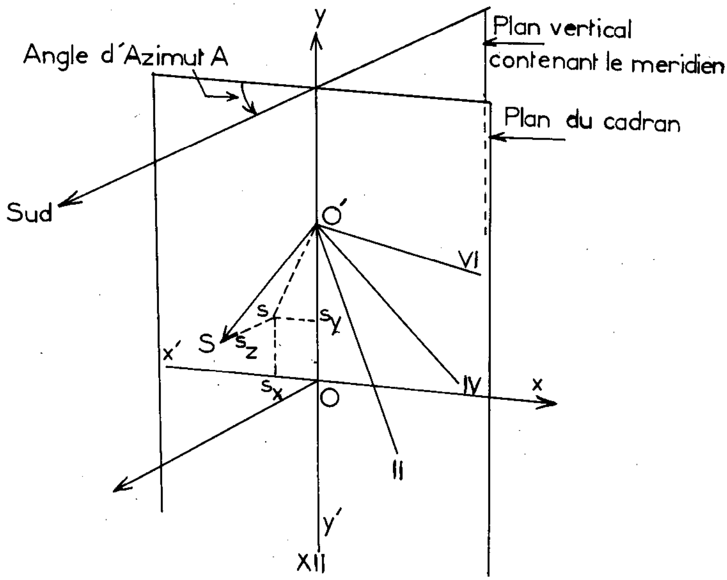


Fig. 13

On définira un système d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sur le plan du cadran.

$y'y$ sera la ligne méridienne (XII).

L'ombre de l'extrémité du style ou de l'œilleton se situera en O à midi le jour de l'équinoxe.

L'axe Oz complètera le repère.

On se donnera la distance OO' à laquelle le style sera implanté à partir du point O, notée par la suite DI.

Le style a pour longueur O'S ; il est parallèle à l'axe de rotation terrestre. L'angle $\widehat{OO'S}$ vaut 90° - L, L étant la latitude du lieu.

Le point S aura pour coordonnées dans le repère x, y, z.

La projection de S sur le plan du cadran sera s.

H exprimera l'heure à partir du midi à raison de 15 degrés par heure.

H sera nul à midi, négatif le matin, positif l'après-midi.

On notera D la valeur de la déclinaison du soleil. C'est l'angle que fait la direction de l'astre solaire avec le plan équatorial de la terre à la date considérée.

Si N est le nombre de jours écoulés depuis l'équinoxe de printemps (21 mars), D sera obtenu par :

$$D = 23{,}43 \text{ Sin } \frac{360 \cdot N}{365 \cdot 25}$$

quelques valeurs de D : (en degrés décimaux).

22 décembre	— 23,43
22 novembre - 20 janvier	— 20,15
23 octobre - 19 février	— 11,47
21 septembre - 21 mars	0
23 août - 20 avril	+ 11,47
23 juillet - 21 mai	+ 20,15
22 juin	+ 23,43

Enfin A sera l'azimut du plan du cadran. C'est la mesure en degrés de l'angle compris entre le plan du méridien et le plan du cadran (fig. 13). C'est ce dernier qui servira d'origine.

A sera donc compris entre 0 et 180, inférieur à 90° pour un cadran du matin, nul pour un cadran non déclinant, supérieur à 90° pour un cadran du soir.

2. Expression des coordonnées d'un point appartenant à une ligne horaire.

On ne calculera que les coordonnées x et y de s, puisque, pour tous les points appartenant au plan du cadran, on peut écrire : $z = 0$.

Pour un cadran d'azimut A, en un lieu de latitude L, à une date où la déclinaison est D, à une heure à laquelle correspond l'angle horaire H, l'ombre de l'extrémité du style se trouvera au point de coordonnées :

$$x = \frac{-\text{DI} \cos D \sin H \sin L \cos L}{\cos D \sin H \cos A - \sin L \cos D \cos H \sin A + \cos L \sin D \sin A} \quad [4]$$

$$y = \frac{\text{DI} \cos L (\cos D \cos L \sin H \cos A + \sin D \sin A)}{\cos D \sin H \cos A - \sin L \cos D \cos H \sin A + \cos L \sin D \sin A} \quad [5]$$

3. Equation des lignes horaires.

On écrira d'abord :

$$\frac{y}{x} = \frac{-(\cos D \cos L \sin H \cos A + \sin D \sin A)}{\cos D \sin H \sin L}$$

$$\frac{y}{x} = -\left(\frac{\cos A}{\operatorname{tg} L} + \frac{\operatorname{tg} D \sin A}{\sin H \sin L}\right)$$

d'où :

$$\operatorname{tg} D = -\left(\frac{\sin H \sin L}{\sin A}\right)\frac{y}{x} - \frac{\sin H \cos L}{\operatorname{tg} A}.$$

On divise l'expression de x [4] par $\cos D$:

$$x = \frac{-\mathrm{DI} \sin H \sin L \cos L}{\sin H \cos A - \sin L \cos H \sin A + \cos L \sin A \operatorname{tg} D}$$

On reporte l'expression de $\operatorname{tg} D$ dans x.

Pour obtenir :

$$y = \left[\frac{\cos A}{\cos L \sin L} + \frac{\cos H \sin A}{\cos L \sin H} - \frac{\cos L \cos A}{\sin L}\right] x + \mathrm{DI}$$

qui devient, en combinant le 1er et le 2e terme :

$$y = \left[\frac{\cos A}{\cos L \sin L} - \frac{\cos^2 L \cos A}{\cos L \sin L} + \frac{\cos H \sin A}{\cos L \sin H}\right] x + \mathrm{DI}$$

ou :

$$y = \left[\frac{\sin L \cos A}{\cos L} + \frac{\operatorname{cotg} H \sin A}{\cos L}\right] x + \mathrm{DI}$$

pour arriver à :

$$\boxed{y = \frac{\sin A \operatorname{cotg} H + \cos A \sin L}{\cos L} x + \mathrm{DI}} \qquad [6]$$

C'est l'équation [6] d'une droite, ligne horaire pour une valeur de H dont la pente dépend des paramètres A et L.

Toutes les lignes horaires passent par le point de coordonnées :

$$x = 0 \qquad y = \mathrm{DI},$$

c'est donc le point O' (fig. 13).

Remarque.

Faisons un changement de coordonnées :

$$y' = y - \mathrm{DI}$$

on a alors :

$$\boxed{y' = \frac{\sin A \; \operatorname{cotg} H + \cos A \; \sin L}{\cos L}\, x} \qquad [7]$$

revenons à l'angle h, écart angulaire entre la ligne horaire et la méridienne : $\operatorname{tg} h = \dfrac{x}{y'}$, on retrouve alors la formule [3] :

$$\boxed{\operatorname{tg} h = \frac{\cos L}{\sin A \; \operatorname{cotg} H + \cos A \; \sin L}.}$$

4. Equation des courbes de dates.

Ce sont des hyperboles joignant les points des différentes lignes horaires, où se trouve l'image de l'extrémité du style à une même date.

Une hyperbole coupe une ligne horaire H à une distance DH du point O' telle que :

$$\mathrm{DH} = \mathrm{LS}\,\frac{\cos D}{\sin(S - D)}$$

avec : LS : Longueur du Style

et : D : Déclinaison du Soleil

$$S \text{ tel que } \operatorname{tg} S = \operatorname{tg} L \cdot \frac{\cos(H - O)}{\cos O} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} O = \frac{-\operatorname{cotg} A}{\sin L}.$$

La ligne des équinoxes est une droite de pente égale à $\dfrac{-\cos A}{\operatorname{tg} L}$, négative pour un cadran du matin, nulle pour le cadran non déclinant, et de pente positive pour un cadran du soir.

5. Expression des coordonnées de S.

Dans le triangle OO'S rectangle en S, l'angle OO'S vaut (90° - L) ; OO' = DI, donc la longueur du style sera :

$$\boxed{LS = O'S = DI \cdot \sin L}$$

et :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -\,DI \sin L \cos L \cos A \\ y &= DI \cos^2 L \\ z &= DI \sin L \cos L \sin A. \end{aligned}}$$

Pour le cadran du matin : $x < 0$ puisque $A < 90°$.

Pour le cadran du soir : $x > 0$.

Pour le cadran non déclinant : $x = 0$.

Par contre, y et z sont toujours positifs.

6. Un exemple.

Le cadran solaire de l'ancien collège de Noyers (Yonne) :

Latitude : L = 47,783 degrés,
Azimut : A = 130 degrés.

Le cadran reçoit la lumière du soleil plutôt l'après-midi.

Les calculs ont été effectués pour un cadran réduit avec DI = 50,0 mm.

On trouve alors :

LS = 37,0 mm,
x = 16,0 mm,
y = 22,6 mm,
z = 19,0 mm.

Le tracé (échelle 1) est présenté sur la fig. 14. On comparera à la photographie du cadran réel (fig. 15).

7. Cadran horizontal.

On calculera les coordonnées x et y des points en effectuant les modifications suivantes dans les formules [4] et [5] :

a) A = 90°.
b) On changera les signes de X et de D.
c) On prendra la valeur du complément de l'angle L.

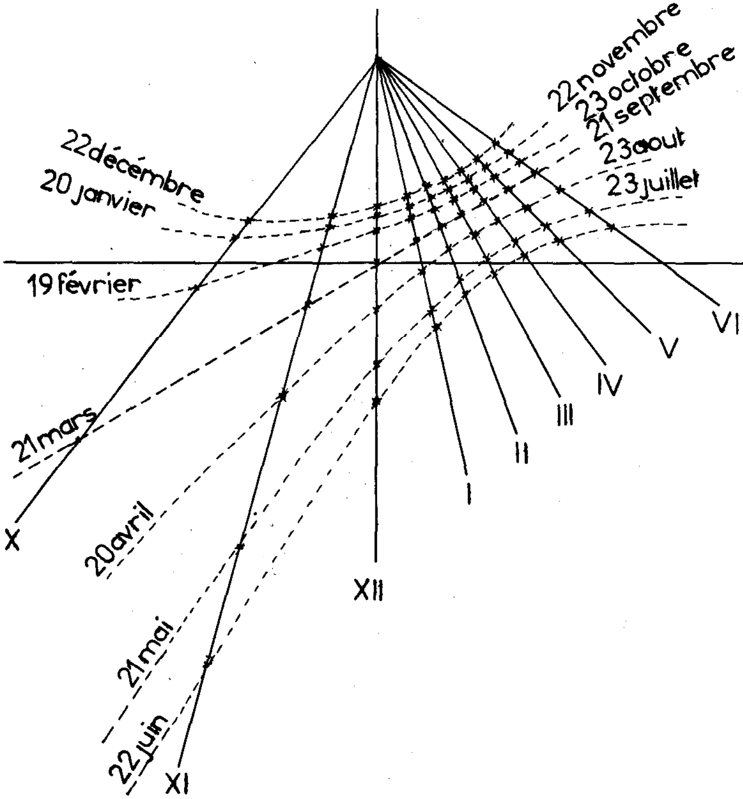


Fig. 14. — Cadran solaire vertical déclinant (vers l'ouest).

On obtient :

$$x = \frac{-\text{Di} \cos D \sin H \sin L \cos L}{\cos L \cos D \cos H + \sin L \sin D} \qquad [4']$$

$$y = \frac{-\text{Di} \sin L \sin D}{\cos L \cos D \cos H + \sin L \sin D} \qquad [5']$$

$$y' = \frac{-\text{cotg}\, H}{\sin L} x \qquad [7']$$

d'où la formule [1] ; $\text{tg}\, h = \sin L \;\; \text{tg}\, H$

$LS = DI \cos L \quad S_x = 0 \quad S_y = DI \cos^2 L \quad S_z = DI \sin L \cos L.$

Fig. 15. — Cadran solaire situé à Noyers (Yonne) vertical déclinant (vers l'ouest) ; Azimut 130°.

N.B. — Les collègues intéressés par des programmes informatiques réalisés de façon à obtenir facilement les résultats du calcul d'un cadran solaire plan peuvent m'écrire.

VI. POURQUOI UN CADRAN SOLAIRE N'INDIQUE-T-IL PAS L'HEURE OFFICIELLE ?

Nous avons déjà dit que tous les cadrans solaires indiquent l'heure solaire vraie locale. Or cette heure varie avec la longitude du lieu, et la date. On comprendra facilement en effet que, dans un même pays comme la France, on ne puisse accepter une heure différente dans chaque ville, du moins à notre époque car il en fut ainsi jusqu'au 19e siècle (2).

1. Définitions.

a) LE JOUR SIDÉRAL : C'est l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du point vernal (ou d'une étoile si l'on néglige la précession des équinoxes dont la période vaut 26 000 ans), au méridien du lieu considéré.

Le point vernal ou point γ est le point d'intersection de l'équateur céleste et de l'écliptique. Le passage a lieu vers le 21 mars (équinoxe de printemps).

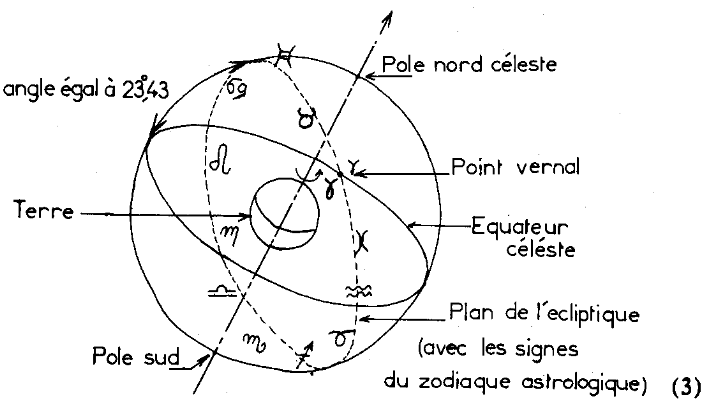


Fig. 16

(2) L'heure de Paris ne fut adoptée que le 15 mars 1891 ; celle de Greenwich le 11 mars 1911, date à laquelle on retarde toutes les pendules de 9 min 21 s.

(3) Actuellement le point vernal se trouve dans la constellation des Poissons à cause de la précession des équinoxes.

b) LE JOUR SOLAIRE VRAI : C'est la durée séparant deux passages consécutifs du soleil dans le plan du méridien du lieu.

Sa durée est supérieure à celle du jour sidéral de 3 min 56 s.

Mais l'orbite de la terre autour du centre d'inertie du système Soleil - Terre étant une ellipse (de faible excentricité) et son plan l'écliptique ne coïncidant pas avec le plan équatorial terrestre, la durée du jour solaire n'est pas constante.

Il s'écoule 23 h 59 min 39 s entre les 16 et 17 septembre à midi mais 24 h 00 min 15 s entre les 23 et 24 décembre.

Il y a au plus 30 s d'accroissement ou de diminution entre deux jours consécutifs à midi et ceci 4 fois par an : les 28 mars, 20 juin, 17 septembre, et 23 décembre. On définit alors :

c) LE JOUR SOLAIRE MOYEN : C'est la durée séparant deux passages consécutifs d'un soleil fictif se déplaçant apparemment à vitesse constante par rapport à la terre et sur l'équateur céleste et non sur l'écliptique. Elle est égale par définition à 24 heures d'où la définition du jour civil, et de ses sous-multiples heures, minutes et secondes.

C'est aussi la durée du jour vrai les 11 février, 15 mai, 27 juillet et 4 novembre.

d) LE JOUR SIDÉRAL MOYEN : Sa durée est donc de 23 heures 56 minutes et 4 secondes.

e) Aux jours solaires vrai et moyen correspondent les TEMPS SOLAIRE VRAI et TEMPS SOLAIRE MOYEN que l'on appelle encore TEMPS LOCAL VRAI et TEMPS LOCAL MOYEN.

f) Définitions de l'ORIGINE DU TEMPS SOLAIRE, et du TEMPS LÉGAL.

Par convention, il est midi quand il est 0 heure au temps solaire donc il faut ajouter 12 heures au temps solaire moyen pour obtenir le temps civil moyen.

Ce temps dépend de la longitude du lieu et l'on a divisé la terre en 24 fuseaux horaires en 1883. Sur chaque fuseau, l'heure légale moyenne au TEMPS LÉGAL, est celle du méridien passant au milieu du fuseau.

g) Le temps civil légal du méridien de Greenwich est appelé TEMPS UNIVERSEL (T.U.) autrefois Greenwich Mean Time (G.M.T.).

LA LIGNE DE CHANGEMENT DE DATE suit en gros le méridien antipode dans le Pacifique.

A l'est c'est le jour J, et le jour J + 1 à l'ouest.

On « gagne » un jour en traversant la ligne en voyageant vers l'est. On « perd » un jour si on voyage vers l'ouest.

Remarques.

1. Certaines nations dont la France n'utilisent pas l'heure légale de leur fuseau.

De 1945 à 1976, on vécut à l'heure de l'Europe Centrale (T.U.) + 1 h), au lieu de l'heure du fuseau de Greenwich (T.U.) ; depuis le 28 mars 1976, on adopte l'heure de l'Europe Occidentale (T.U. + 2 h) l'été, d'où une correction de 1 heure en hiver, et de 2 heures en été pour obtenir l'heure légale à partir de l'heure solaire.

2. Des nations utilisent des fractions horaires : Iran : T.U. + 3 h 30 ; Inde : 5 h 30 ; Malaisie : 7 h 30.

D'autres sont concernées par plusieurs fuseaux : U.R.S.S. : T.U. + 3 à T.U. + 13 ; U.S.A. : T.U. — 5 h à T.U. — 8 h.

2. Equation du temps.

Elle traduit les irrégularités constatées dans le mouvement de la terre et tient compte essentiellement des 2 facteurs déjà nommés : excentricité de l'ellipse et déviation par rapport au plan équatorial.

L'équation du temps est égale à la différence entre temps solaire moyen et temps solaire vrai.

Sa valeur est nulle 4 fois par an : 16 avril, 15 juin, 2 septembre, 25 décembre, c'est-à-dire qu'à ces dates le midi vrai coïncide exactement avec le midi moyen.

a) 1er facteur : l'inclinaison du plan équatorial de 23°5 sur le plan de l'écliptique, responsable du phénomène des saisons ; cela amène la « réduction à l'équateur » :

$$\boxed{R = -592 \sin \frac{2\pi}{182,62} (N - 80)}$$

ce qui est une fonction sinusoïdale de période égale à la moitié de l'année (365,25 jours solaires moyen) et d'amplitude 592 s ou 9 min 52 s. L'origine en est le 21 mars (80e jour de l'année).

b) 2e facteur : la vitesse de la terre varie comme l'indique la 3e loi de Képler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

la vitesse est la plus élevée au périhélie le 3 janvier et la plus faible à l'aphélie le 3 juillet, d'où « l'équation du centre » :

$$\boxed{C = 460 \sin \frac{2\pi}{365{,}25} (N - 3)}$$

fonction sinusoïdale de période égale à une année.

L'origine : le 3 janvier, 3e jour de l'année civile d'amplitude 460 s ou 7 min 40 s.

c) La valeur de l'équation du temps est alors :

$$\boxed{E = R + C}$$

Cette somme est construite sur la fig. 17.

On retrouve les 4 dates pour lesquelles E = 0. Les maximums et les minimums sont observés les 11 février, 15 mai, 27 juillet, 4 novembre, c'est donc lorsque la durée du jour solaire vrai vaut exactement 24 heures.

La plus forte valeur est mesurée le 11 février avec 14 min 20 s et la plus faible le 4 novembre avec — 16 min 23 s.

3. **La correction due à la longitude.**

Puisqu'il y a 24 fuseaux horaires répartis sur le globe, l'angle correspondant à chacun d'eux a la valeur $\frac{360}{24} = 15$ degrés.

Nous aurons donc une correction égale à $\frac{60}{15}$ soit 4 minutes par degré de longitude et de 4 secondes par minute d'angle de longitude.

La correction exprimée en minutes est alors égale à 4 × longitude (en degrés).

Elle est positive à l'ouest de l'axe du fuseau horaire ; elle est négative à l'est.

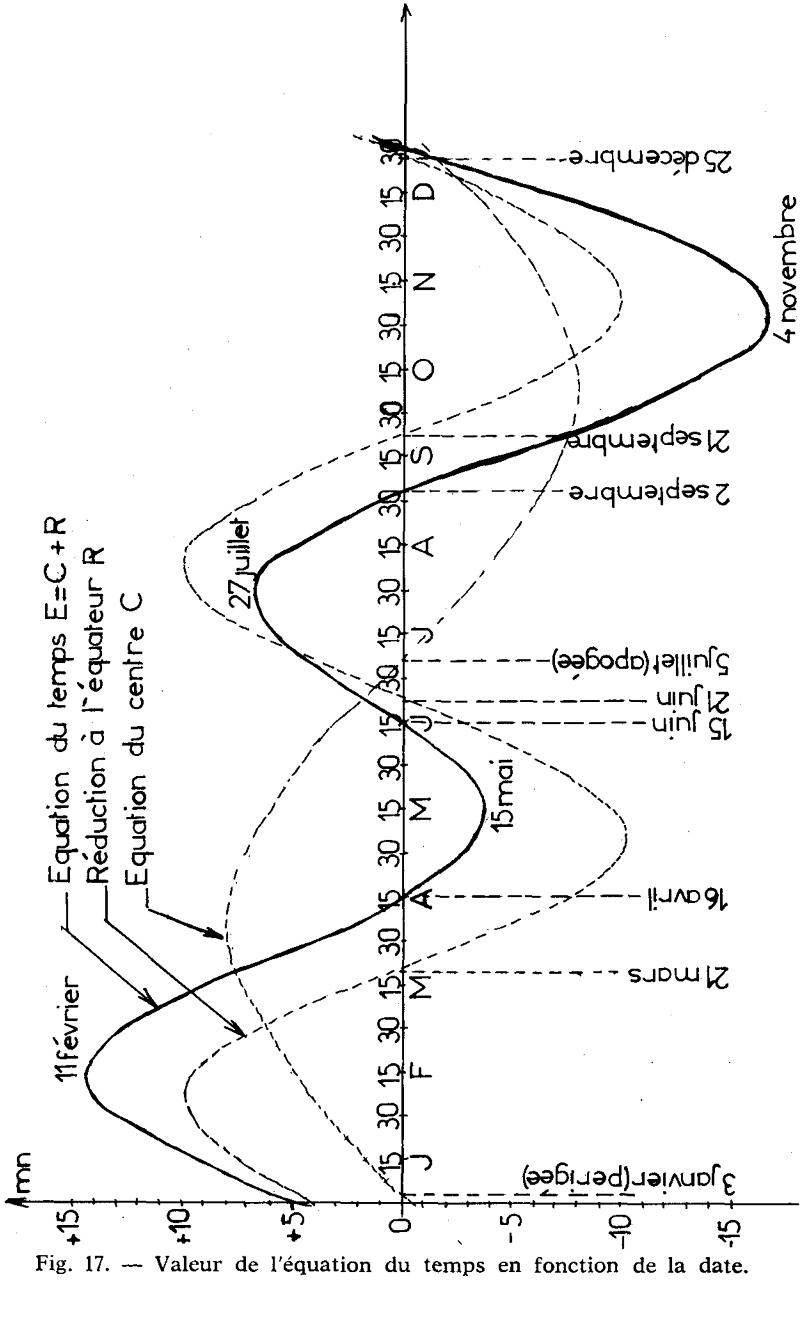


Fig. 17. — Valeur de l'équation du temps en fonction de la date.

Exemple : Dans le fuseau qui nous concerne, on aura :

à Paris :	longitude : 2°20' Est	- correction : — 9 min 21 s
à Brest :	longitude : 4°30' Ouest	- correction : + 18 min
à Strasbourg :	longitude : 7°45' Est	- correction : — 27 min.

CONCLUSION.

On arrive à la formule suivante qui permettra d'utiliser le cadran solaire :

HEURE LÉGALE = HEURE LUE SUR LE CADRAN (solaire vraie)
+
Equation DU TEMPS
+
Correction DE LONGITUDE par rapport au méridien de référence du fuseau horaire
+
en France : 1 heure en hiver, 2 heures en été par rapport au Temps Universel.

Exemples :

1. à Paris : correction de longitude : — 9 min. Le cadran indique 15 h.

   Le 1er mars : équation du temps = + 12 min ; heure d'hiver.

   Heure légale : 15 h + 12 min — 9 min + 1 h = 16 h 03 min.

   Le 15 octobre : équation du temps = — 14 min ; heure d'hiver.

   Heure légale : 15 h — 14 min — 9 min + 1 h = 15 h 37 min.

2. à Strasbourg : correction de longitude : — 27 min.

   L'heure légale sera le 15 octobre :

   15 h — 14 min — 27 min + 1 h = 15 h 19 min.

3. à Brest : correction de longitude : + 18 min. Le cadran indique 9 h 30 le 15 juillet (heure d'été).

   L'équation du temps vaut : + 6 min.

   Heure légale : 9 h 30 min + 6 min + 18 min + 2 h = 11 24 min.

VII. « LE 8 SOLAIRE » OU MERIDIENNE.

Il figure sur certains cadrans solaires, mais aussi, on le rencontre seul sur des murs ou des pavages d'églises. Il porte encore le nom d'analemme.

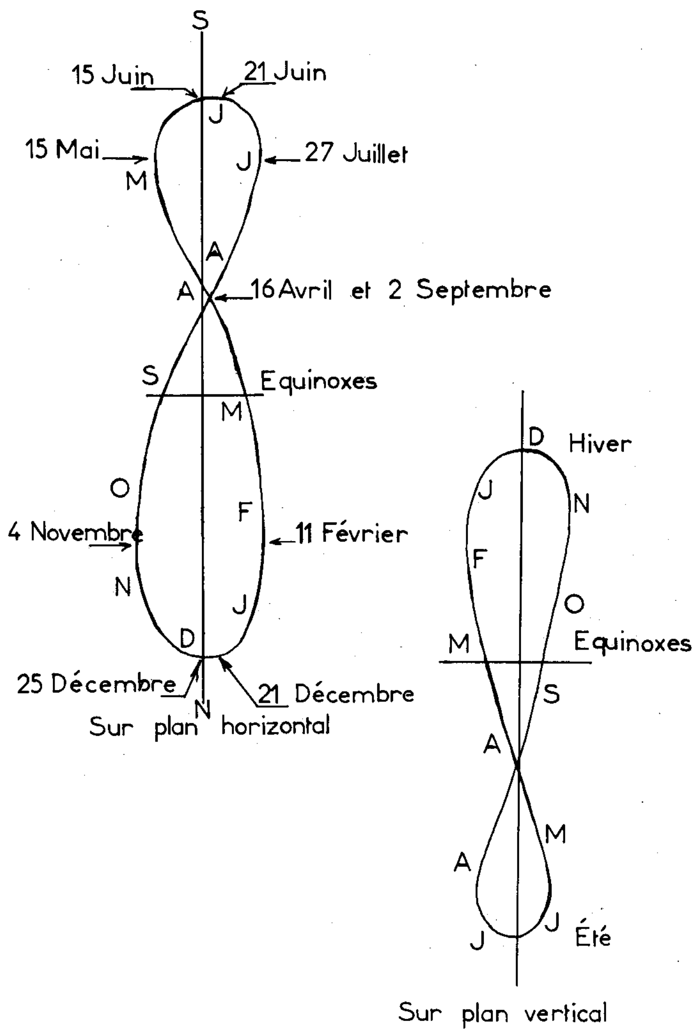


Fig. 18. — Le 8 solaire.

On construit la courbe exprimant l'équation du temps E en fonction de la longueur de l'ombre au midi solaire vrai.

Pratiquement, on peut repérer la position de l'extrémité de l'ombre du style du cadran, à l'instant exact du midi moyen.

On obtient un 8 allongé, aux deux parties inégales, construit de part et d'autre de la ligne du midi vrai ou méridienne.

On y retrouve les quatre maximums ou minimums de l'équation du temps :

— les quatre valeurs nulles,

— l'indication des saisons et des mois,

— les solstices d'hiver et d'été.

ANNEXE 1

Démonstration de la formule [1] :

$$\mathrm{tg}\, h = \sin \mathrm{L}\ \mathrm{tg}\, \mathrm{H}.$$

Selon la figure, on écrira :

dans le triangle rectangle $A B_0 B_1$:

$$\mathrm{tg}\, \mathrm{H} = \frac{B_0 B_1}{A B_0}$$

dans le triangle $O B_0 B_1$ rectangle en B_0 :

$$\mathrm{tg}\, h = \frac{B_0 B_1}{O B_0}$$

donc :

$$\mathrm{tg}\, h = \frac{A B_0}{O B_0}\ \mathrm{tg}\, \mathrm{H}$$

or, dans le triangle $O A B_0$ rectangle en A :

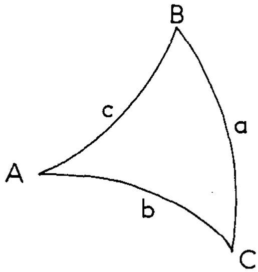
$$\sin \mathrm{L} = \frac{A B_0}{O B_0}$$

puisque le style fait un angle à L avec le plan horizontal, d'où la formule [1].

ANNEXE 2

ELEMENTS DE TRIGONOMETRIE SPHERIQUE

Soit un triangle sphérique A B C :



à chaque côté correspond un angle noté *a*, *b*, ou *c*, de sommet, le centre de la sphère, sur laquelle est construit le triangle.

La somme des angles A + B + C du triangle est inférieure à 180°.

Les deux relations fondamentales sont :

$$\boxed{\cos a = \cos b \, \cos c + \sin b \, \sin c \, \cos A}$$

et :

$$\boxed{\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}}$$

en écrivant $\cos a$ et $\cos b$, on tire :

$$\sin b \, \cos a = \cos a \, \sin c - \sin a \, \cos c \, \cos B$$

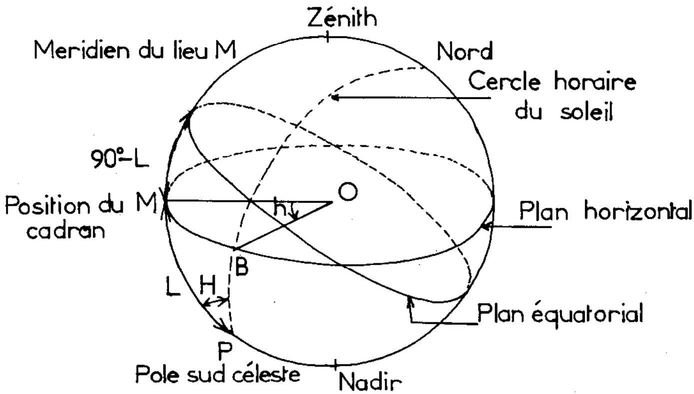
et :

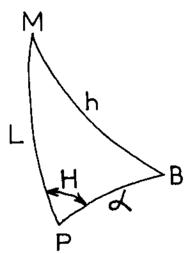
$$\sin A \, \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \, \sin c - \cos c \, \cos A.$$

Voir : P. BAKOULINE, E. KONONOVITCH, V. MOROZ : *Astronomie générale*, pages 58 - 61. Editions de Moscou.

ANNEXE 3

DEMONSTRATION DE LA FORMULE [1] EN UTILISANT LA TRIGONOMETRIE SPHERIQUE





On considèrera le triangle sphérique P M B compris entre le plan méridien du lieu et le plan méridien contenant le soleil.

Le triangle est rectangle en M. Deux côtés valent respectivement h et L. L'angle en P vaut H. On peut écrire :

$$\cos h = \cos L \ \cos \alpha + \sin L \ \sin \alpha \ \cos H$$

$$\cos \alpha = \cos h \cos L \qquad (\cos M = 0)$$

et avec la relation des sinus :

$$\frac{\sin H}{\sin h} = \frac{\sin 90°}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sin h}{\sin H}$$

en remplaçant $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ dans la première relation :

$$\cos h = \cos^2 L \cos h + \sin L \sin h \operatorname{cotg} H$$

ou :

$$\cos h\,(1 - \cos^2 L) = \sin L \sin h \operatorname{cotg} H$$

$$\cos h \cdot \sin L = \sin h \operatorname{cotg} H$$

qui devient :

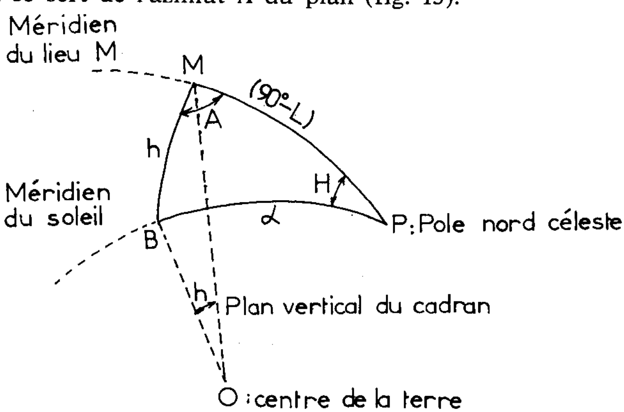
$$\boxed{\operatorname{tg} h = \sin L \cdot \operatorname{tg} H.}$$

ANNEXE 4

La trigonométrie sphérique permet aussi de démontrer la formule [3] pour le triangle vertical déclinant.

Ce cadran n'est plus orthogonal au plan du méridien du lieu.

On se sert de l'azimut A du plan (fig. 13).



Le triangle sphérique P M B n'est plus rectangle. On écrira donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos h = \cos(90 - L)\cos\alpha + \sin(90 - L)\sin\alpha\cos H \\ \cos\alpha = \cos h\cos(0 - L) + \sin h\sin(90 - L)\cos A \\ \dfrac{\sin H}{\sin h} = \dfrac{\sin A}{\sin\alpha} \end{array}\right.$$

ou :

$$\left\{\begin{aligned} \cos h &= \sin L \cos \alpha + \cos L \sin \alpha \cos H \\ \cos \alpha &= \cos h \sin L + \sin h \cos L \cos A \\ \sin \alpha &= \frac{\sin A \ \sin h}{\sin H}. \end{aligned}\right.$$

La première ligne devient :

$\cos h = \ldots$

$$\ldots \sin^2 L \cos h + \sin h \cos L \sin L \cos A + \frac{\cos L \sin A \sin h \cos H}{\sin H}$$

$$\cos h \cdot \cos^2 L = \sin h \cos L \sin L \cos A + \cos L \sin A \sin h \operatorname{cotg} H.$$

On simplifie par $\cos L$; on divise par $\cos h$:

$$\Rightarrow \cos L = \frac{\sin h}{\cos h} (\sin L \cos A + \sin A \operatorname{cotg} H)$$

ou :

$$\boxed{\operatorname{tg} h = \frac{\cos L}{\sin A \ \operatorname{cotg} H + \cos A \ \sin L}.}$$

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages scientifiques et d'enseignement :

Didier GODILLON : *Guide de l'Astronome amateur.* Doin Ed.

H. DAULOUX-DUMESNIL : *Eléments de l'Astronomie de Position.* Librairie Scientifique et Technique Albert-Blanchard. 1974.

P. MADORNI : *Vade Mecum de l'Astronome Amateur.* Desforges. Strasbourg.

C. BIGOURDAN : *Gnomonique ou Traité théorique et pratique de la construction des cadrans solaires.* 1956. Paris. Gauthier-Villars.

C. BOUTEREAU : *Gnomonique élémentaire.* Manuels Rovot.

A. DANDON : *Astronomie Générale* (Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste). Librairie Scientifique et Technique Albert-Blanchard. 1980.

A. DAMERLIAC : *Cours d'Astronomie.* 1972. Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées.

S. BOURGES : *Calculs astronomiques pour amateurs* (adaptés à l'emploi d'un calculateur électronique de poche ou d'un micro-ordinateur). Masson. 4e éd. 1980.

Albert E. WAUCH : *Sundials : Their Theory and Construction Dover Publications Inc.* New-York.

P. BOURGE et S. FULSTAND : *Midi au Soleil.* Saint-Aubin-de-Coutteraire, 61400 Montagne (petit ouvrage de base).

B. CARBONNEUX, P. DIDIER et C. MATHIEU : *La pratique de l'Astronomie.* Cedic.

Généralités :

Charles BOURSIER : *800 devises de cadrans solaires.* Berger-Levrault. 1936.

Robert SAGOT : *Répertoire des cadrans solaires de France.* Société Astronomique de France, 3, rue Beethoven, Paris.

Jean-Marie MOMET : « *Les cadrans solaires* ». Ed. Ch.-Massin. 1981 (bel ouvrage illustré sur les cadrans de France) .

Atlas d'astronomie. Stock. 1976.

F. LE LIONNAIS : *Le temps.* Robert Delpère. Ed. 1959.

R. ROHR : *Les cadrans solaires. Histoire, théorie et construction.*

Revues, Périodiques :

D. TOUSSAINT : *Le cadran solaire équatorial.* B.U.P. n° 640 (1982).

Science et Vie n° 737 (février 1979).

Science et Vie n° 743 (août 1979) : *Le 8 solaire.*

Science et Vie n° 745 (oct. 1979) : *Construction d'un cadran équatorial.*

Science et Vie n° 747 (déc. 1979) : *Le 8 solaire.*

Science et Vie n° 749 (février 1980) : *Construction d'un cadran horizontal, et lecture de l'heure.*

Bibliothèque de Travail n° 600 (15 février 1965) : *Les cadrans solaires.*

Ciel et Espace n° 173 (janvier - février 1980) : *Les Gnomons de Paris.*

Ordinateur Individuel n° 3 (décembre 1978) : *Calcul d'un cadran solaire vertical point par point.*

Ordinateur de Poche n° 8 (septembre - octobre 1982).