Mise en évidence expérimentale de l'énergie emmagasinée dans un condensateur : 1/2 CV^2, ou dans une bobine : 1/2 LI^2.

par R. MOREAU, Bordeaux.

Dans les deux cas, on cherche à convertir une partie de l'énergie emmagasinée en énergie potentielle mécanique en remontant un objet pesant dans le champ de la pesanteur, grâce à un petit moteur muni d'une poulie. La forme mécanique de l'énergie est, en effet, la plus intuitive.

I. ENERGIE EMMAGASINEE DANS UN CONDENSATEUR.

Il faut tout d'abord se procurer un condensateur de très forte capacité. La société N E C fabrique des condensateurs de 1 farad, dont la tension de fonctionnement est 5 V et qui sont commercialisés sous le nom de « Super-Cap », par la Société Tekelec. A Paris, on trouve de tels condensateurs chez Radio-M.J. Un tel condensateur, chargé sous 5 V permet de détenir 12,5 joules. L'expérience sera également spectaculaire en utilisant un condensateur chimique plus ordinaire de 100 000 µF, de tension maximale 10 ou 15 V ; chargé sous 8 V, un tel condensateur « contient » 3,2 J.

Il faut ensuite disposer d'un petit moteur capable de fonctionner sous faible tension, et possédant, dans des conditions éminemment transitoires, un rendement acceptable. Les petits moteurs à réducteurs distribués par Pierron (MT 2475, anciens moteurs Meccano) conviennent bien. Mais on obtiendra un résultat encore meilleur en utilisant un moteur de perceuse miniature Applicraft M 8 (c'est le moteur MT 2468 de chez Pierron), en vente dans beaucoup de super-marchés ou dans des magasins spécialisés d'Electronique ou de modèles réduits (prix moyen : 75 F).

La poulie sera avantageusement constituée d'un bout de crayon à papier, ou de crayon de couleur, de 4 ou 5 cm de longueur, percé au niveau de la mine et collé sur l'axe du moteur. On utilisera un fil de coton très souple et assez fin, dont une extrémité sera collée sur la poulie, et l'autre reliée à une masse marquée de 100 g.

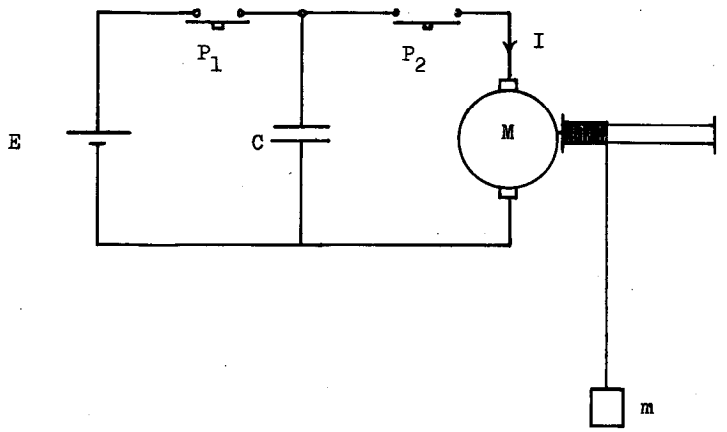

Fig. 1

Nous décrirons l'expérience telle qu'on peut la réaliser avec un condensateur de 1 F et un moteur Applicraft M 8.

Quand on appuie sur P_1, le condensateur C se charge sous l'intensité maximale que peut débiter la source de f.é.m. E. Il est bon, pour le condensateur, de limiter cette intensité à 1 ou 2 ampères. Si l'on ne dispose pas d'alimentation limitée en intensité, on pourra utiliser une pile ordinaire (E = 4,5 V), qui permettra de recharger convenablement le condensateur plusieurs centaines de fois, ou 4 petits accumulateurs Cd — Ni montés en série (E = 4,8 V), ou une alimentation ordinaire un peu « arrangée ». On ne peut, en effet, se contenter de prendre E = 5 V et R = 4,7 Ω, car la constante de temps de la charge (τ = RC, de 4,7 s, entraînerait une durée de charge trop élevée (une vingtaine de secondes).

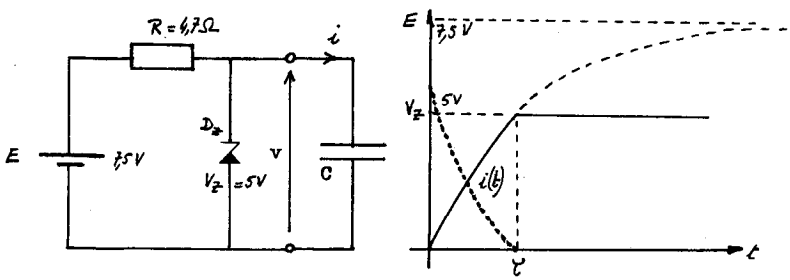

Fig. 2

En revanche, le montage de la fig. 2 permet d'avoir une intensité maximale limitée à 1,6 A et une charge complète au bout de 5 secondes. (La diode Zener D_z doit pouvoir supporter une intensité de 0,6 A et la résistance R doit pouvoir dissiper 5 W.

Les résultats.

Lorsque le condensateur C est chargé sous 5 V et que l'on appuie sur le bouton-poussoir P_2 (fig. 1), la masse m de 100 g remonte d'une hauteur h qui s'établit en moyenne à 3,9 m. Au moment où le moteur s'arrête, la tension v aux bornes du condensateur, qu'il est bon de visualiser en permanencee, est encore légèrement supérieure à 1 V (mais l'intensité I traversant le moteur est devenue trop faible pour hisser la masse m. Il reste donc encore 1/2 joule environ dans le condensateur.

Sur 12 joules consommés, le dispositif expérimental très simple décrit précédemment permet donc d'en transformer 3,9 en énergie potentielle mécanique.

Il est intéressant de savoir ce qu'est devenue l'autre partie de l'énergie et ce qu'il faut faire — ou éviter — pour que l'expérience réussisse.

Modélisation des éléments intervenant dans l'expérience.

Il s'agit du moteur et du condensateur.

Le moteur présente une force électromotrice E' proportionnelle à sa vitesse de rotation : $E' = K\Omega$.

Le moment Γ_e de son couple électromagnétique est, avec la même constante de proportionnalité, de la forme $\Gamma_e = K \cdot I$.

Nous noterons J le moment d'inertie de la partie tournante du moteur, r le rayon de la poulie, x la distance parcourue par la masse m, T la tension du fil, et nous admettrons que les divers phénomènes dissipatifs internes au moteur introduisent un moment de pertes $\Gamma_p = K \cdot I_1$ que nous supposerons constant.

De même, nous poserons $\Gamma_u = m\,g\,r = K \cdot I_2$.

L'enroulement d'induit du moteur possède en outre une résistance R_M.

Le condensateur, quant à lui, est décrit par sa capacité C et une résistance série R_C qui, pour le phénomène envisagé, assez lent, est faible ($R_C \simeq 0{,}5\ \Omega$). Nous poserons $R = R_M + R_C$.

Les équations décrivant le problème sont, dès lors, les suivantes :

Equation n° 1, électrique :

$$U = \frac{Q}{C} = E' + RI = K\Omega + RI.$$

Equation n° 2, électrique :

$$I = -\frac{dQ}{dt}.$$

Equation n° 3, électromagnétique :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = KI - Tr - \Gamma_p = KI - Tr - KI_1.$$

Equation n° 4, mécanique :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = T - mg.$$

Equation n° 5, cinématique :

$$r\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

La première équation, dérivée et jointe à la seconde, donne :

$$K\frac{d\Omega}{dt} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0.$$

Des trois dernières, on déduit :

$$(J + m \cdot r^2) \cdot \frac{d\Omega}{dt} = KI - mgr - KI_1 = KI - KI_2 - KI_1.$$

En posant $J + mr^2 = J'$ et $I_1 + I_2 = I_0$, cette dernière équation s'écrit :

$$J'\frac{d\Omega}{dt} = KI - KI_0.$$

En éliminant $\frac{d\Omega}{dt}$ de ces deux dernières équations, on aboutit à l'équation différentielle très simple régissant l'évolution de l'intensité $I(t)$:

$$R\frac{dI}{dt} + \left(\frac{K^2}{J'} + \frac{1}{C}\right) I = \frac{K^2}{J'} \cdot I_0.$$

On en déduit la solution : $I = \dfrac{I_0}{1 + (J'/K^2\,C)} + A \cdot e^{-t/\tau}$,

avec :

$$\tau = \frac{R}{(K^2/J') + (1/C)}.$$

Passons aux ordres de grandeur :

$$I_1 = 0{,}37\ A\,; \quad I_2 = 0{,}38\ A \quad \text{donc} \quad I_0 = 0{,}75\ A.$$

$$K = 10^{-2}\ V.s\,; \quad R_M = 1\ \Omega \quad \text{donc} \quad R = 1{,}5\ \Omega.$$

$$J = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ kg.m^2,$$

$$m = 0{,}1\ kg, \quad r = 4\ mm \quad \text{donc } J' = 2{,}1 \cdot 10^{-6}\ kg.m^2.$$

$$C = 1{,}0\ F.$$

On en déduit la valeur de la constante :

$$\frac{I_0}{1 + (J'/K^2\,C)} = I'_0 = \frac{I_0}{1{,}021} = 0{,}73\ A.$$

(Cette valeur est plus faible que I_0, intensité qui traverserait le moteur en régime permanent parce que, le condensateur C se déchargeant, la vitesse du moteur, après le bref démarrage, ne cesse de décroître).

Par ailleurs, $\tau = 31$ ms.

La première équation ($U = K\Omega + R \cdot I$), permet encore de déterminer la valeur de l'intensité initiale $I(0) = \dfrac{E}{R} = 3{,}3\ A$.

Ainsi l'intensité passe très vite (en 0,1 s), à sa valeur limite 0,73 A (fig. 3) et ceci dure tant que la f.é.m. E' est positive,

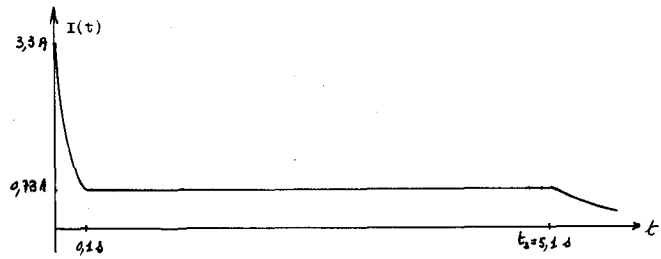

Fig. 3

c'est-à-dire tant que la tension aux bornes du condensateur reste supérieure à $R \cdot I'_0 = 1{,}1$ V. Ensuite $I(t)$ décroît exponentiellement avec la constante $RC = 1{,}5$ s.

La fig. 3 donne, en ne respectant pas les échelles, l'allure de l'évolution de l'intensité $I(t)$. Cette évolution peut être enregistrée par tout procédé analogique ou numérique. L'enregistrement confirme totalement les prévisions théoriques : I est de la forme $I = 0{,}73 + 2{,}6 \cdot e^{-t/\tau}$.

A partir de la connaissance de $I(t)$, on peut remonter à celle de la charge Q et donc à l'évolution de la tension aux bornes du condensateur. Cette tension décroît linéairement (à l'exception de la phase de démarrage, extrêmement brève, et de celle qui suit l'arrêt du moteur).

On en déduit la date t_2 à laquelle le moteur s'arrête :

$$(U = R \cdot I'_0 = 1{,}1 \text{ V}).$$

On trouve, et cela est confirmé par l'enregistrement, $t_2 = 5{,}1$ s.

Il est dès lors possible de calculer les pertes par effet Joule jusqu'à cette date : $P_J = \int_0^{t_2} R \cdot I^2 \, dt = 4{,}4$ J.

(Il faut noter que la pointe de courant initiale est, à elle seule, responsable d'un surcroît de perte d'énergie de 0,33 J).

Il reste à calculer les pertes mécaniques et magnétiques du moteur.

Nous avons estimé le moment du couple de pertes, $\Gamma_p = K \cdot I_1$ à $3{,}7 \cdot 10^{-3}$ N. m ; or, la masse m s'est élevée de 3,9 m à l'aide d'une poulie de 4 mm de diamètre. L'angle de rotation, θ, du rotor du moteur est donc connu, ainsi que l'énergie $\Gamma_p \cdot \theta$ perdue par frottements, courants de Foucault et hystérésis. On trouve 3,6 J.

Nous sommes donc à même de présenter un bilan complet de l'énergie.

Energie électrostatique initiale : 12,5 J.

Energie électrostatique résiduelle lors de l'arrêt du moteur : 0,6 J.

Energie électrostatique transformée : 11,9 J.

Energie potentielle finale : 3,9 J .

Energie consommée par effet Joule : 4,4 J.

Energie dissipée dans le moteur par d'autres voies que l'effet Joule : 3,6 J.

Remarque.

Le coefficient K est facilement mesurable, ainsi que les intensités I_1 et I_0 qui sont celles que le moteur absorbe en régime permanent, c'est-à-dire à vitesse constante, à vide puis en charge.

La valeur de R_M est la moyenne d'un nombre élevé de mesures correspondant à diverses positions balais-collecteur (rotor bloqué, I = 1 A par exemplee).

Les valeurs de J et de R_C ont été estimées pour que le modèle coïncide avec les faits (enregistrement de $I(t)$, de $U(t)$, mesure de h, etc.).

Un enregistrement de $I(t)$ par conversion analogique-digitale et micro-ordinateur permet de calculer directement les pertes par effet Joule, sans connaître la forme mathématique de $I(t)$.

Pour que l'expérience réussisse, c'est-à-dire qu'une fraction notable de l'énergie électrostatique initiale soit transformée en énergie potentielle mécanique, il faut :

— que la résistance du moteur soit faible,

— que le rapport $\frac{I_2}{I_1}$ soit au moins égal à 1, autrement dit, que le moment du couple utile soit supérieur à celui du couple de pertes. Cependant, l'intensité I_0 ne doit pas dépasser 1 A. (Les pertes par effet Joule, en effet, sont proportionnelles au carré de l'intensité !)

II. ÉNERGIE EMMAGASINÉE DANS UNE BOBINE.

Le dispositif expérimental est donné sur la fig. 4.

Il utilise le phénomène d'auto-induction.

Nous préciserons plus loin les caractéristiques des divers éléments du montage, mais signalons tout de suite qu'il faut attacher une grande importance à l'interrupteur P. Il est bon que celui-ci soit un interrupteur à couteau avec lame à ressort pour assurer une rupture brusque.

La diode D doit être une diode de puissance, prévue pour des intensités dépassant 10 A. Ces deux précautions ont pour effet de réduire les pertes d'énergie par étincelle de rupture et conduction.

Lors de la fermeture de P, un courant d'intensité J s'établit dans la bobine d'inductance L. La diode D, en revanche, empêche le moteur de fonctionner. En régime permanent, posons : $J = J_0$.

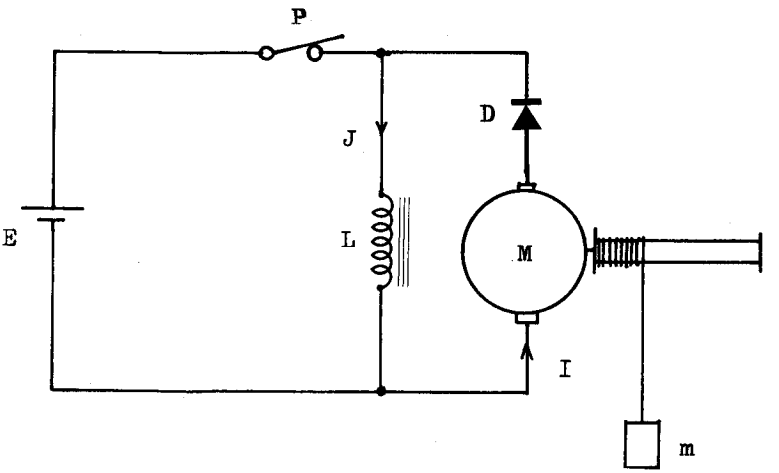

Fig. 4

Quand on ouvre P, la force électromotrice d'induction $-L\frac{dJ}{dt}$ est responsable du passage d'un courant d'intensité J = I dans la maille formée de la bobine, du moteur et de la diode D.

Si le moteur, durant cette phase de décroissance de J, est capable de soulever un poids *mg* d'une hauteur *h*, on peut bien dire, puisque le générateur de f.é.m. E est hors circuit, que l'énergie *mgh* est le produit de la conversion en énergie mécanique d'une partie de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine du fait du passage de l'intensité J_0.

Le matériel dont on peut couramment disposer dans les lycées ne permet pas d'effectuer cette conversion avec un bon rendement, essentiellement à cause des pertes par effet Joule qui accompagnent la décroissance de J dans le circuit de récupération de l'énergie.

Nous allons cependant réfléchir à la manière de tirer le mieux parti de ce dont nous disposons et de rendre l'expérience spectaculaire.

Nous focaliserons notre attention en premier lieu sur la bobine, puis sur le moteur.

Notons tout d'abord R_L la résistance de la bobine d'inductance L. On a $J_0 = \frac{E}{R_L}$.

Lorsque l'on ouvre K, la f.é.m. $-L\frac{dJ}{dt}$ ne peut être le seul terme infini de l'ensemble de ceux qu'il faut prendre en considération pour écrire l'équation de la maille contenant la bobine, le moteur et la diode. Ce terme reste donc fini et, par conséquent, l'intensité J ne subit pas de discontinuité, aussi l'intensité initiale qui traverse le moteur M est-elle $J_0 = \frac{E}{R_L}$.

Pour éviter la détérioration du petit moteur, en imposant aux contacts balais-collecteur un courant trop élevé, il faut donc que cette intensité initiale soit limitée (3 A au maximum pour un petit moteur Applicraft, et 1,5 A pour un moteur de walkman chargé, dans ces appareils, du déroulement des bandes magnétiques. C'est avec un tel moteur que nous avons obtenu les résultats les plus spectaculaires).

On ne peut donc compter, pour augmenter l'énergie magnétique emmagasinée, sur la seule augmentation de l'intensité I_0 initiale.

D'ailleurs la quantité d'énergie emmagasinée n'est pas la seule variable à prendre en considération : comme la puissance perdue par effet Joule est, à chaque instant, proportionnelle à J^2, il vaut mieux, pour réussir l'expérience, et convertir la plus grande partie possible de l'énergie magnétique initiale en énergie mécanique, augmenter, dans le terme $\frac{1}{2} L J_0^2$ supposé constant, le facteur L que le paramètre J_0. Autrement dit, si, pour un moteur donné, on estime nécessaire de disposer, au début du phénomène d'induction magnétique, d'une énergie de 5,5 J, il vaut mieux obtenir cette énergie avec L = 2,75 H et J_0 = 2 A qu'avec L = 1 H et J_0 = 3,32 A.

Ces raisons rendent nécessaire l'utilisation d'une bobine d'inductance supérieure à 1 H.

Les collections de lycée comportent certes des bobines à noyau de fer, réglables, et d'inductance maximale voisine du henry. Mais la résistance de ces bobines est assez élevée (R_L = 10 Ω), si bien que le rapport $\frac{L}{R_L}$ n'est égal qu'à 0,1 s.

Ces bobines, de plus, ne permettent pas de stocker beaucoup d'énergie magnétique. En effet, lorsque l'intensité qui les parcourt atteint 1,5 A, la région centrale du noyau magnétique se

sature et l'énergie emmagasinée ne peut donc guère y dépasser 2,5 J.

Il faut donc constituer une bobine possédant un noyau de fer (car seul le fer, en dehors de l'utilisation du phénomène de supraconduction, permet d'obtenir des champs magnétiques élevés), mais pourvue d'un entrefer car il est facile de constater que la densité d'énergie magnétostatique que l'on peut stocker dans l'air (ou un matériau non ferromagnétique), $\frac{B^2}{2\mu_0}$, soit, pour un champ magnétique de 1,41 T, 0,8 J/cm³ est considérablement plus élevée que celle que l'on peut loger dans le fer lui-même $\left(\frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\right.$ en considérant le fer comme un matériau parfait, de perméabilité relative μ_r constante, soit 1 000 fois moins, si $\mu_r = 1\,000$, que dans l'air).

On pourra donc constituer une bobine satisfaisante en plaçant, sur une armature de transformateur démontable, deux bobines de 1 000 spires, montées en flux additifs et en ménageant, entre le noyau en U et la culasse, un entrefer de 3 mm (deux fois 1,5 mm), à l'aide, par exemple, de rectangles de carton.

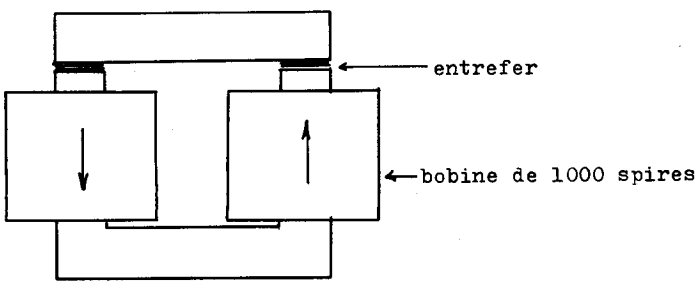

Fig. 5

Ainsi, avec une intensité de 2 A parcourant les bobines, on obtient, dans l'entrefer (2 × 1,5 mm), un champ magnétique proche de 1,41 T. L'énergie ainsi stockée dans l'entrefer (20 cm² × 3 mm = 6 cm³), est voisine de 4,8 J

Il y a encore de l'énergie due à la magnétisation du fer lui-même ($W_e = \int_0^B H \cdot dB$, W_e étant l'énergie emmagasinée par unité de volume, or ici, le volume considéré est voisin de 1 dm³.)

L'énergie emmagasinée dans le fer est donc voisine de 0,35 J (fig. 6).

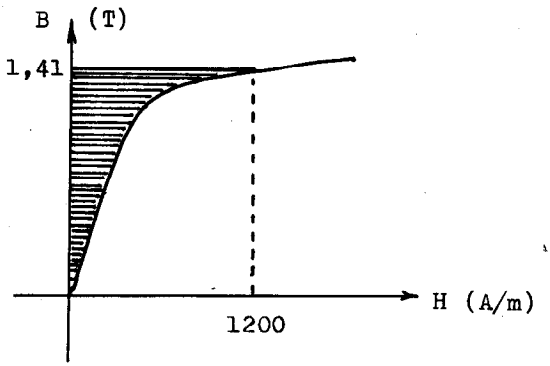

Fig. 6

La présence de lignes de champ en dehors du circuit magnétique (le fer est un peu saturé et ne canalise qu'imparfaitement le flux) est à l'origine d'une troisième « localisation » d'énergie magnétique, due aux fuites, et dont l'expression peut être donnée par $\frac{1}{2} l_f \cdot J^2$, où l_f est l'inductance de fuites du bobinage.

L'énergie correspondante est voisine de 0,35 J lorsque J = 2 A.

Pour cette valeur de l'intensité, l'énergie magnétique emmagasinée dans le dispositif est donc voisine de 5,5 J.

Les valeurs que nous venons de donner correspondent au matériel que nous avons testé. Les caractéristiques varient, suivant les fournisseurs, les dates d'acquisition, d'un établissement à l'autre ; elles n'ont donc qu'un caractère indicatif.

Elle satisfont au théorème d'Ampère : $\int H \cdot dl = N.J.$ En effet, si B est la valeur moyenne, constante, du champ magnétique dans le circuit magnétique, on a, dans l'entrefer,

$$H_a = \frac{B}{\mu_0} = 1{,}12 \cdot 10^6 \text{ A/m},$$

et ceci, sur une longueur l_a = 3 mm. Donc $H_a \cdot l_a = 3\,370 \cdot A$.

Dans le fer, pour B = 1,41 T, on a sensiblement H_f = 1 200 A/m. (Comme il s'agit de matériel pédagogique à usages multiples, le

matériau utilisé possède des propriétés intermédiaires entre ce qui serait nécessaire pour construire un véritable transformateur — on devrait alors avoir une valeur de H dix fois plus faible, au moins — et ce qui se prête à la visualisation commode d'un cycle d'hystérésis, où un matériau dur convient mieux).

Comme la longueur moyenne du circuit magnétique est de 50 cm $= l_f$, on a donc $H_f \cdot l_f = 600$ A.

D'où : $H_a \cdot l_a + H_f \cdot l_f = 3\,970$ A $\simeq 4\,000$ A.

Or, cette expression est égale à $N \cdot J_0$ et puisque l'on dispose de 2 bobines de 1 000 spires chacune, on voit qu'il est nécessaire d'imposer une intensité J_0 de 2 A pour obtenir ce résultat.

Comme les bobines ont une résistance de 8,75 Ω, il faut pouvoir disposer d'une source de tension de f.é.m. E = 35 V pour obtenir ces conditions.

Les considérations quantitatives qui précèdent conduisent donc à une valeur de L égale à 2,75 H : $\left(L = \dfrac{2 \cdot W_{emmagasinee}}{I^2} \right)$

et donc, à une constante de temps $\dfrac{L}{R} = 0{,}16$ s.

Par rapport à une bobine comme celle qui a été envisagée précédemment (bobine à noyau de fer réglable, $L_{max} = 1$ H, $R_L = 10$ Ω), nous gagnerons sur deux plans à utiliser le type de bobine décrit par la fig. 5 avec les valeurs numériques précédentes : davantage d'énergie initiale, et davantage de temps pour l'utiliser.

D'ailleurs, si l'on utilise un tout petit moteur, on peut encore réduire l'intensité initiale J_0.

Si l'on peut se satisfaire d'une intensité $J_0 = 1$ A, on dispose donc de 2 000 ampère-tours pour magnétiser le circuit magnétique. Choisissons le même champ magnétique B = 1,41 T, proche de la saturation .

La circulation de H dans le fer est donc la même : 600 A.

Il reste donc 1 400 ampère-tours pour magnétiser l'entrefer de largeur l'_a avec le même champ magnétique B = 1,41 T. On trouve $l'_a = 1{,}25$ mm. Calculons la nouvelle valeur de l'énergie emmagasinée.

Dans le fer, on a 0,35 J, comme précédemment (même volume de fer, dans le même état magnétique).

Dans l'entrefer, de volume 2,5 cm^3, on aura, à raison de 0,8 J/cm^3, une énergie de 2,0 J.

Le flux de fuites, réduit, puisque l'entrefer est réduit, ne correspondra qu'à 0,05 J environ. Soit, au total W = 2,4 J.

L'inductance correspondante $L = \dfrac{2 \times 2{,}4}{I} = 4{,}8$ H.

La nouvelle constante de temps $\dfrac{L}{R_L}$ vaut 0,275 s.

Inversement, si l'on utilise un moteur nécessitant des courants plus importants, on choisit $J_0 = 3$ A, il faudra, pour obtenir l'énergie maximale, augmenter la longueur l_a de l'entrefer et la porter à 4,8 mm pour garder les mêmes états magnétiques que précédemment.

On disposera alors d'une énergie magnétique totale de 0,35 + 7,7 + 0,95 = 9,0 J.

L'inductance correspondante est réduite à 2,0 H et la constante de temps $\dfrac{L}{R_L}$, à 0,11 s.

Remarque.

On peut mettre en évidence le rôle de l'entrefer, de manière très simple et spectaculaire, en procédant comme suit : supposons que, pour un moteur donné, on ait réalisé l'expérience avec une intensité J_0 et une longueur d'entrefer bien choisies (par exemple, comme précédemmeent $J_0 = 2$ A et $l_a = 3$ mm). Supposons que l'on ait obtenu une hauteur de remontée $h = 1{,}20$ m, pour une masse $m = 20$ g. Si, pour la même intensité J_0, on supprime l'entrefer, on n'obtiendra par exemple que $h' = 20$ cm de remontée, et si l'on triple l'épaisseur d'entrefer, on n'obtiendra par exemple que $h'' = 40$ cm. Il y a donc une longueur d'entrefer optimale pour emmagasiner l'énergie à intensité J_0 constante.

La fig. 7 permet de donner une interprétation simple de ce phénomène qui revêt, si l'on n'y prend pas garde, un aspect quelque peu paradoxal. Elle donne les trois caractéristiques $\varphi = f(J)$ que l'on obtient, pour un même bobinage (2 000 spires), en faisant varier l'entrefer.

En (*a*), la longueur de l'entrefer, l_a, est nulle.

Une intensité J_0 de 2 A sature très largement le fer du circuit magnétique. Si l'on peut parler d'inductance pour les très

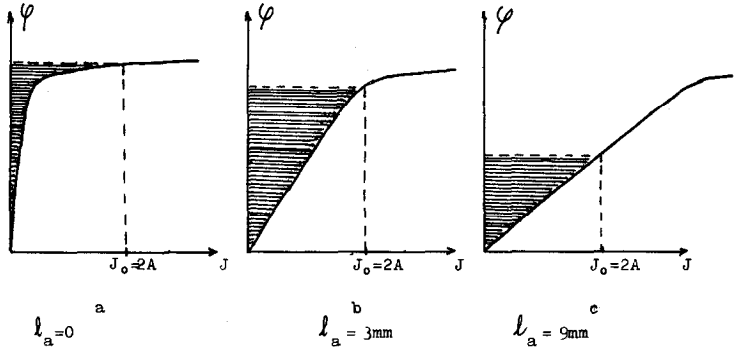

Fig. 7

faibles valeurs de J (en négligeant le phénomène d'hystérésis) — et l'on a, effectivement une inductance de plusieurs dizaines de henrys pour des intensités voisines de 50 mA — cette notion devient caduque en présence du phénomène de saturation.

Quant à l'énergie restituée par la bobine lorsque l'intensité J passe de J_0 à la valeur nulle, elle est égale à l'aire hachurée. En effet, on a, selon la fig. 8 :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}; \quad P = e \cdot J; \quad dW_r = e \cdot J \cdot dt = -J \cdot d\varphi$$

$$W_r = \int_{J_0}^{0} -J \cdot d\varphi = \int_{0}^{J_0} J \cdot d\varphi.$$

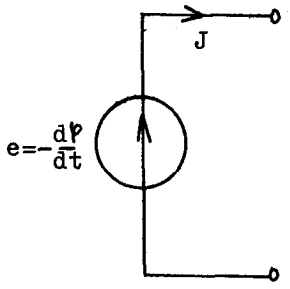

Fig. 8

Cette équation établit bien la proposition.

On voit donc que l'énergie emmagasinée à entrefer nul est faible.

Sur la fig. 7 *b*, la longueur l_a de l'entrefer est calculée pour que le champ magnétique dans l'entrefer y soit important mais que la portion de caractéristique décrite soit presque une droite (le fer n'est pas encore trop saturé).

Dans ces conditions, l'énergie emmagasinée, W_r, est, pour cette valeur $J_0 = 2$ A, maximale, et, dans la mesure où l'on peut parler de coefficient d'inductance, on a $W_r = 5{,}5$ J pour $J_0 = 2$ A et donc $W_r = \frac{1}{2} L \cdot J_0^2$, soit :

$$L = 2{,}75 \text{ H}.$$

Sur la fig. 7 *c*, l'entrefer a une épaisseur l_a trop élevée, la portion de caractéristique $\varphi = f(J)$ utilisée pour $0 \leqslant J \leqslant J_0$ est bien linéaire, mais l'inductance obtenue est trop faible.

L'énergie emmagasinée pour $J_0 = 2$ A est donc maximale pour la longueur d'entrefer qui amène le fer du circuit magnétique à la limite de la saturation.

Nous modéliserons donc la bobine à noyau de fer par ses éléments de réduction L et R_L.

Pour ce qui est du moteur, l'analyse du mouvement va nous montrer qu'il est bon de le choisir plus petit que dans le cas du condensateur, de manière à ce que l'intensité I_0 qu'il absorberait en régime permanent pour soulever la masse m, soit très faible devant l'intensité initiale J_0 qui le traverse.

Comme la bobine a, malheureusement, une résistance élevée ($R_L = 17{,}5\ \Omega$), la résistance du moteur peut, sans grande conséquence, atteindre $R_M = 5\ \Omega$ comme c'est pratiquement le cas du petit moteur MT 2475 de chez Pierron dont nous avons parlé précédemment.

En ce qui concerne la diode D (fig. 4), nous supposerons que lorsqu'elle conduit, la tension U_D à ses bornes est constante et égale à 1 V.

Mise en équation du problème.

Equation électrique :

$$-L \frac{dI}{dt} = R\,I + K\Omega + U_D, \quad \text{avec} \quad R = R_L + R_M.$$

Les équations électro-mécanique et mécaniques sont les mêmes que précédemment, si bien qu'en posant $J' = J + mr^2$; $K I_0 = mgr + \Gamma_p$, on a :

$$J' \frac{d\Omega}{dt} = K I - K I_0.$$

De ces deux équations, on tire, en dérivant la première :

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{K^2}{J' \cdot L} \cdot I = \frac{K^2}{J' \cdot L} \cdot I_0.$$

Nous raisonnerons sur les valeurs numériques suivantes :

$R = 22\ \Omega$; $L = 2{,}75$ H ; $K = 10^{-2}$ V. s ; $I_0 = 0{,}2$ A ;

$$J' = 0{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ kg. m}^2.$$

Elles supposent que le moteur est plus petit que précédemment et que le moment de son couple utile (*mgr*), est plus faible.

Nous connaissons, de plus, la valeur de l'intensité initiale $I(0) = J_0 = 2$ A, et l'équation électrique, dans laquelle on porte $\Omega = 0$, nous donne la valeur de la dérivée initiale :

$$\frac{dI}{dt}(0) = -16{,}36 \text{ A/s}.$$

L'ensemble de ces données et des conditions initiales conduit à la solution :

$$I(t) = 2{,}08 \cdot e^{-4t} \cdot \sin(8{,}7 \cdot t + 2{,}1) + 0{,}2.$$

On remarquera que si le moteur est mis en court-circuit, la loi de décroissance de $I(t)$ s'opère selon l'exponentielle classique de constante de temps $\frac{L}{R} = 125$ ms (en négligeant l'influence de la tension U_D) :

$$I(t) = 2{,}0 \cdot e^{-8t}.$$

La fig. 9 montre ces deux courbes, qu'il est parfaitement possible — et même souhaitable — d'enregistrer et de traiter ensuite numériquement.

Elles permettent notamment d'évaluer l'énergie perdue par effet Joule. La courbe de décroissance de l'intensité en l'absence de moteur permet même de connaître l'énergie emmagasinée dans la bobine, puisque dans ce cas, celle-ci est ensuite entièrement consommée par effet Joule.

On trouve $W_r = \int_0^\infty R \cdot I^2 \cdot dt = R \cdot J_0^2 \cdot \frac{L}{2 \cdot R} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot J_0^2$ (évidemment !)

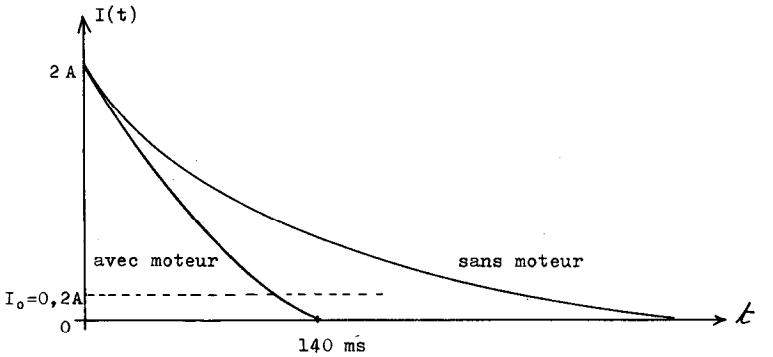

Fig. 9

Ici, donc, l'évaluation de cette intégrale donne bien $W_r = 5{,}5$ J.

Mais il est possible de recommencer la même opération dans le cas où le moteur est actionné. Dans *ce cas*, on trouve que l'énergie dissipée par effet Joule vaut 4,1 J.

Sur les 5,5 *J d'énergie magnétique emmagasinée, seule, la fraction* 1,4 *J est transformée en autre chose que de l'effet Joule !* Si l'on enlève, ensuite, les pertes mécaniques et magnétiques propres au moteur, il ne reste pas grand-chose pour l'énergie potentielle mécanique que l'on cherche à récupérer.

Cependant, si l'on ne cherche pas à faire un véritable bilan de l'énergie, l'expérience est spectaculaire en respectant les consignes suivantes : choisir un petit moteur et un rayon de poulie (r), faible, de manière à diminuer l'intensité I_0.

L'équation mécanique $\dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{K \cdot (I - I_0)}{J'}$, montre en effet que la vitesse angulaire du moteur ne croît que pendant la phase où l'intensité I est supérieure à I_0, soit 120 ms dans notre exemple.

Très vite, ensuite, le courant s'annule et la masse ne continue à s'élever qu'en transformant l'énergie cinétique acquise auparavant.

C'est, notamment, la relation $\dfrac{dI}{dt}(0) = -(R \cdot I(0) + U_D)/L$ qui montre que, pour augmenter cette durée, il faut, avant tout, augmenter le rapport L/R et diminuer l'intensité I_0.

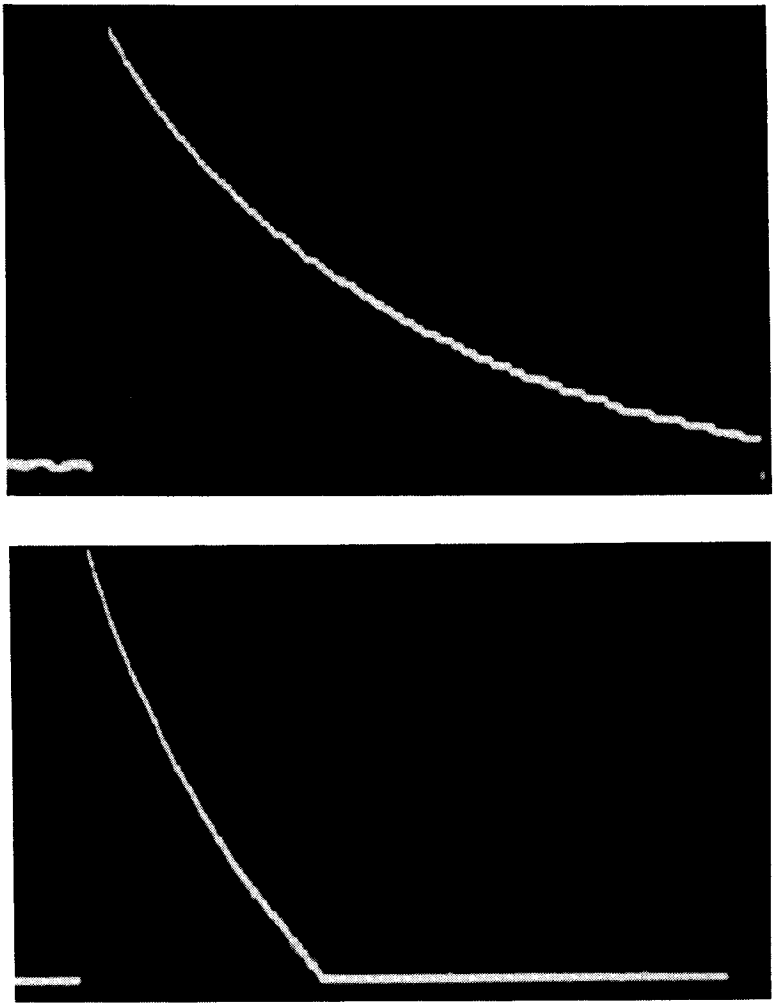

Fig. 10

Enregistrement de l'intensité du courant d'induction J (t).

En haut sans le moteur : c'est une exponentielle ; on en déduit l'énergie emmagasinée dans le circuit magnétique et la valeur de l'inductance L.

En bas avec le moteur : on en déduit l'énergie perdue par effet Joule et, par différence, l'énergie qui a été transformée par le moteur.

Ainsi, les meilleurs résultats obtenus sont-ils, en ce qui nous concerne, réalisés avec un entrefer de 1,5 mm, une intensité J_0 de 1 A, un petit moteur de walkman consommant à vide 30 mA, chargé par une poulie de 4 mm de rayon soulevant une masse de 20 g.

L'énergie magnétique emmagasinée est voisine de 2,5 J et la masse *m* s'élève de 1,5 m. On récupère donc 0,3 J.

CONCLUSION.

Même de toutes petites expériences, comme celles qui viennent d'être décrites, peuvent être, pour celui qui les réalise, cherche à les comprendre, à les améliorer, etc., source de réflexion active, et, de modestes découvertes.

Au nombre de celles-ci, pour moi, figure l'existence d'un pseudo-régime permanent, caractérisé par l'intensité $\frac{I_0}{1 + (J'/K^2C)}$, pour ce qui est de l'expérience avec le condensateur.

Pendant ce régime, le gain d'énergie potentielle est fourni, pour la plus grande partie, par la transformation de l'énergie du condensateur, mais, pour une part plus faible, par la transformation d'énergie cinétique (acquise lors de la phase de démarrage) en énergie potentielle, du fait du ralentissement du moteur alimenté par une tension qui décroît.

Je reconnais encore que je n'avais pas songé à comparer la densité volumique maximale d'énergie stockée dans le condensateur N E C (environ 1 J/cm³) à celle que l'on peut stocker par voie électrostatique dans de l'air à la pression normale $\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right.$ correspond à $4 \cdot 10^{-5}$ J/cm³ pour E = 30 kV/cm) ou par voie chimique dans un petit accumulateur courant au nickel-cadmium (9 V, 110 mA. h pour 16 cm³ correspondent à 220 J/cm³).

Ainsi, le fait de passer d'un condensateur à air à un condensateur « chimique » constitué, essentiellement de carbone pulvérulent et d'acide sulfurique, permet-il de multiplier par 25 000 la densité d'énergie stockée par voie « électrostatique ». Mais on reste encore éloigné des densités emmagasinées par voie chimique.

Je n'avais pas, non plus, noté que l'on peut stocker 1 J/cm³ dans l'entrefer d'un électro-aimant quand on y établit un champ magnétique de 1,5 T, ce qui constitue une valeur proche de la valeur maximale. Curieusement, cette densité d'énergie magné-

tique est égale, si l'on ne tient pas compte du volume de fer nécssaire à la constitution du circuit magnétique, à celle que l'on peut stocker sous forme « électrostatique » dans le condensateur N E C.

Ensuite, dans le cas de la bobine, c'est l'étude du modèle mathématique qui m'a montré qu'étant donnée la résistance élevée du circuit, il valait mieux, pour augmenter le rendement de la transformation, très faible, augmenter L que I_0, de manière à accroître la durée pendant laquelle la bobine fournit de l'énergie cinétique au système constitué du rotor du moteur et de la masse *m*.