

Variations sur le Potentiel Vecteur

I

ELEMENTS POUR UNE HISTOIRE DU POTENTIEL VECTEUR

Bruno JECH

Lycée Jean Dautet, 17000 La Rochelle

bruno.jech@wanadoo.fr

**« Les potentiels tinrent lieu d'échafaudage
lors de l'élaboration des nouvelles théories
[de l'électromagnétisme] »
Heinrich Hertz**

PREAMBULE

Si la citation mise en exergue souligne le rôle historique éminent qu'eurent les potentiels électromagnétiques dans l'élaboration de la théorie de Maxwell, il faut toutefois la compléter par ce qu'écrivit Hertz juste avant : « *Je tiens la prédominance du potentiel vecteur dans les équations [de Maxwell] pour une présentation rudimentaire de nature mathématique* » ([18], p. 209)¹. Il n'est donc pas étonnant que l'enseignement traditionnel de l'électromagnétisme laisse souvent accroire que le potentiel vecteur magnétique ne constitue qu'un outil — sans importance véritable — de calcul du champ magnétique. Cette importance est si peu reconnue que le potentiel vecteur est carrément omis de la liste — pourtant détaillée — du *Manuel des symboles et de terminologie des grandeurs et des unités physico-chimiques* édité par la Société Chimique de France (1982). De plus, lorsqu'une nouvelle grandeur est introduite en physique, il est d'usage de donner immédiatement son unité ; force est de constater que la plupart des manuels que nous avons consultés se dispensent de le faire pour le potentiel vecteur. Dans le cas contraire, les auteurs s'appuient sur le fait que le champ magnétique $\mathbf{B}(M,t)$ dérive d'un potentiel vecteur $A(M,t)$ pour donner comme unité de ce dernier le *tesla-mètre*... ce qui n'est pas faux, sans pour

¹ Les chiffres entre crochets, parfois accompagnés de numéros de page, renvoient aux sources bibliographiques.

autant ressortir du *Système International* où l'unité de potentiel vecteur est le *weber par mètre*².

A contrario, le potentiel électrique $V(M,t)$ jouit d'une faveur certaine, peut-être tout bonnement parce que c'est un scalaire et que nous sommes à même de mesurer aisément des *différences de potentiel*. Or le formalisme relativiste unit en un même quadrivecteur le potentiel vecteur $A(M,t)$ et le potentiel scalaire $V(M,t)$: il n'y aurait donc pas lieu de privilégier l'un par rapport à l'autre. Et en tout état de cause, est-il aujourd'hui légitime de réduire le rôle des potentiels à de simples auxiliaires mathématiques de la théorie des champs comme le faisait Hertz, et donc de leur dénier un statut de grandeur physique digne de ce nom ?

Le présent article est le premier d'une série que nous intitulos *Variations sur le potentiel vecteur*, le mot *variations* étant pris métaphoriquement dans un sens que nous souhaiterions musical. Sans oublier à aucun moment l'unité quadrivectorielle des potentiels, nous nous proposons ainsi de donner un coup de projecteur sur le potentiel vecteur, d'une part pour son rôle fondamental en électromagnétisme bien sûr — un rôle bien plus fondamental que ne pouvait l'imaginer Hertz à son époque —, d'autre part en tant que concept efficient lorsqu'il est généralisé par le biais de l'analogie formelle — ce qui nous permettra de mettre à jour des *néo*-potentiels vecteurs au sein même de l'électromagnétisme, ainsi qu'en théorie du rayonnement et en mécanique des milieux continus. Mais pour commencer, eu égard au fait que l'approche historique d'un concept permet souvent d'en mieux saisir la portée et la signification, remontons le temps...

UNE HISTOIRE LONGUE ET COMPLEXE

En recherchant les origines du potentiel vecteur, nous nous sommes assez rapidement convaincu du fait qu'une histoire exhaustive de ce concept revenait pratiquement à faire celle des théories de l'électromagnétisme. D'où la prudence du titre donné à cet article, les développements qui suivent ne devant être tenus que pour de simples éléments d'une histoire dont nombre d'aspects ne sont pas abordés ici³.

² Conformément aux normes AFNOR, [12], p. 72.

³ Nous n'irons guère au-delà de la théorie électromagnétique formulée par Maxwell. Resterait à traiter de l'utilisation du potentiel vecteur en thermodynamique au XIX^e siècle, en théorie du rayonnement

Nous verrons ainsi comment **William Thomson** — à la suite des travaux de Stokes sur les milieux continus —, et surtout **James Clerk Maxwell** forgèrent petit à petit ce que nous appelons aujourd'hui *potentiel vecteur*, la maturation de ce concept accompagnant de conserve la difficile élaboration des théories de l'électromagnétisme. En la circonstance, nous serons naturellement conduits à rappeler l'apport déterminant de **Michael Faraday** sur le plan expérimental et... inductif — au sens de l'induction scientifique — dans l'émergence de la théorie du champ électromagnétique. Nous ferons aussi un détour par l'oeuvre de **Franz Neumann** qui approcha l'expression du potentiel vecteur actuel sans toutefois en extraire le concept ni la fonction. Et nous terminerons sur ce qui peut sembler un paradoxe : alors que la découverte des ondes hertziennes confirmait les prédictions les plus hardies de la théorie électromagnétique de Maxwell, les Maxwelliens eux-mêmes entreprenaient de faire un sort aux potentiels qui avaient pourtant si fidèlement accompagné et aidé la démarche du savant écossais.

DE LA THEORIE DES MILIEUX CONTINUS DE STOKES...

En 1845, le physico-mathématicien irlandais George Gabriel Stokes⁴ publie un long article n'ayant *a priori* rien à voir avec l'électromagnétisme et qui s'intitule : « Théories du frottement interne des fluides en mouvement, et de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques » [42]. En bref, il s'agit d'une étude mécanique de ce que nous appelons aujourd'hui les milieux continus⁵. Pour ce qui nous intéresse, dans la deuxième section de l'article traitant du mouvement d'un fluide visqueux, Stokes introduit une grandeur qu'il dénomme « *vitesse angulaire du fluide* », grandeur comportant trois composantes liées à celles de la vitesse du fluide au point considéré, ce pour rendre compte des mouvements de rotation locale dudit fluide :

— potentiels retardés que nous verrons plus tard —, en mécanique variationnelle, en théories relativistes et quantiques,...

⁴ George Gabriel Stokes, né en 1819 à Skreen (Irlande), mort en 1903 à Cambridge, est l'auteur de multiples travaux en physique, tant sur les milieux continus (hydrodynamique, viscosité,...), qu'en optique (fluorescence, diffraction de la lumière, double réfraction,...). En mathématiques, nous lui devons en particulier un théorème dont il sera souvent question dans ce qui suit.

⁵ Ce travail faisait suite à ceux de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) (*Mécanique Analytique*) et surtout à ceux d'Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

c'est notre actuel *vecteur champ tourbillon* $\Omega(M, t)$ lié au champ d'écoulement $\mathbf{v}(M, t)$ du fluide par⁶ :

$$\Omega(M, t) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}(M, t) = \frac{1}{2} \nabla \wedge \mathbf{v}(M, t)$$

Dans la section suivante, après avoir suivi une démarche analogue à celle adoptée pour les fluides visqueux, Stokes établit les équations traduisant l'équilibre et le mouvement de solides élastiques, équations usant également du vecteur rotation locale.

Si nous faisons référence à cette théorie de Stokes, c'est qu'elle ne pouvait qu'éveiller l'attention des théoriciens du magnétisme. Voici pourquoi : vingt-cinq ans plus tôt, dans son mémoire publié le 21 juillet 1820 qui relatait les effets du galvanisme sur une aiguille aimantée, le physicien danois Jean Christian Oersted (1777-1851) notait à propos de ce qu'il désignait par *conflit électrique* : «... *Le conflit électrique n'est pas enfermé dans le conducteur mais... il est en même temps répandu dans l'espace alentour et ce sur une assez grande distance. Il est permis de conclure semblablement des observations que le conflit exécute des mouvements circulaires... c'est en effet la nature du mouvement circulaire d'avoir dans ses parties opposées une direction opposée...* » [34]⁷. Aujourd'hui nous dirions que l'action magnétique d'un *courant électrique* est orthoradiale par rapport au courant⁸... tout comme une vitesse tourbillonnaire l'est par rapport à l'axe d'un tourbillon. Il était donc relativement naturel de supposer que, dans les milieux subtils alors imaginés pour tenter d'interpréter mécaniquement les phénomènes électriques et magnétiques, les effets magnétiques se manifestent de façon tourbillonnaire. Restait à formaliser cette intuition.

⁶ En 1845, le calcul vectoriel et a *fortiori* l'analyse vectorielle étaient encore dans les limbes. Ce fut d'ailleurs en partie grâce aux travaux de Stokes que ces domaines mathématiques prirent leur essor. Aussi ne faut-il voir dans l'utilisation des opérateurs d'analyse vectorielle adoptés ici qu'une écriture moderne. Notons au passage que l'opérateur ∇ fut introduit par le physico-mathématicien irlandais, William Rowan Hamilton (1805-1865) dans le cadre de sa théorie des quaternions, théorie développée dans une série d'articles et ouvrages publiés entre 1843 et 1866 et dont nous reparlerons ci-après. Cet opérateur fut ensuite appelé *nabla* pour sa forme triangulaire analogue à celle d'une lyre assyrienne — *nebel* en hébreu —, ancêtre de la harpe ([10], pp. 3-27).

⁷ Nous avons utilisé le texte original — en latin — d'Oersted. Ce texte peut à juste titre être considéré comme marquant véritablement le début de l'étude des phénomènes électro-magnétiques.

⁸ Rappelons que le concept de courant électrique ne fut introduit que durant l'automne 1820 par André Marie Ampère (1775-1836).

... A LA REPRESENTATION DES FORCES MAGNETIQUES DE THOMSON

C'est au physicien britannique William Thomson⁹ que nous devons l'idée — formelle — dont dérivera bien plus tard le potentiel vecteur magnétique. En effet, le 28 novembre 1846, le futur Lord Kelvin — qui n'a alors que vingt-deux ans et a déjà publié maints travaux scientifiques d'importance — met un point final à un court article intitulé : « Sur une représentation mécanique des forces électriques, magnétiques et galvaniques » [45], article destiné au *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Dans cet article, Thomson revient sur une suggestion émise par Faraday dans la onzième série de ses *Experimental Researches in Electricity* — en l'occurrence l'existence éventuelle de correspondances entre la théorie des solides élastiques et celle des corps électrisés — et propose d'appliquer cette idée aux forces électriques et magnétiques, conforté en cela par la découverte de la polarisation rotatoire magnétique faite un an plus tôt par le même Faraday¹⁰. S'appuyant sur la théorie de Stokes citée précédemment et procédant de façon purement formelle¹¹, Thomson est conduit, dans le cas du magnétisme, à identifier les composantes X, Y, Z de la « force magnétique qu'exerce un aimant sur l'unité idéale de magnétisme »¹² aux expressions suivantes :

$$X = \frac{d\beta}{dz} - \frac{dy}{dx}, \quad Y = \frac{dy}{dx} - \frac{d\alpha}{dz}, \quad Z = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}$$

{ α, β, γ } désignant les composantes d'un déplacement élémentaire de corps solide élastique ; cette force magnétique est donc assimilable au double « de la rotation infiniment petite qu'un élément de solide subit, en plus du changement de forme,

⁹ William Thomson, né à Belfast en 1824, mort à Netherhall, près de Largs (Ecosse) en 1907, fut anobli sous le titre de Baron Kelvin of Largs en 1892. Il fut certainement l'un des physiciens les plus prolifiques du XIX^e siècle quant au nombre de publications — 661 recensées —, son activité portant principalement sur l'électromagnétisme théorique et appliqué et la thermodynamique : ses contributions en ces matières furent et restent de toute première importance ([41], pp. 238-252).

¹⁰ En septembre 1845, Faraday observa que la polarisation d'un faisceau lumineux traversant un verre au plomb est modifiée quand ce dernier est placé dans un champ magnétique ([44], pp. 223-224). Nous reviendrons sur cette découverte dans un article ultérieur mettant en scène le théorème de Larmor.

¹¹ A savoir, dans l'esprit de la théorie du potentiel, en égalisant un travail élémentaire à une différentielle totale exacte.

¹² Ce que nous appelons aujourd'hui vecteur champ magnétique \mathbf{B} ... ou, selon les normes AFNOR, induction magnétique.

quand $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ n'est pas une différentielle totale »¹³. Prévenant les inévitables questions concernant la nature du solide hypothético-analogique intervenant dans ses raisonnements, Thomson conclut avec prudence sur ces mots : « Je sortirais des limites de mon propos si j'entamais une étude détaillée de l'état du corps solide représentant divers problèmes en électricité, magnétisme et galvanisme. »¹⁴ Et de promettre d'approfondir le problème. Il s'ensuivit une série de mémoires publiés entre 1849 et 1851 — avec *addenda* en 1871 — et constituant la *Théorie mathématique du magnétisme* [46] de Thomson dont l'essentiel, pour la magnétostatique et au formalisme près, reste encore valable de nos jours.

Ainsi, ce qui deviendra notre potentiel vecteur fit une première apparition formelle au détour d'une analogie mécanique visant à traduire les effets magnétiques de la nature... ce qui, dans le contexte de l'époque, relevait presque d'une démarche obligée, les physiciens du temps, en premier lieu les anglo-saxons, étant dans l'ensemble convaincus que l'électromagnétisme devait trouver une explication mécaniste. Mais nous allons voir que la nécessité de cette grandeur était surtout inscrite dans un phénomène découvert quinze ans plus tôt : *l'induction magnéto-électrique*.

FARADAY ET L' « ETAT ELECTROTONIQUE »

Nul n'ignore — ou ne devrait ignorer — que le phénomène d'induction magnétoélectrique fut mis en évidence par Michael Faraday¹⁵ au moyen d'une série d'expériences — aujourd'hui classiques — réalisées entre août et novembre 1831. Parallèlement à ces expériences, Faraday s'essaya à leur interprétation théorique ; il nota ainsi au paragraphe 60 de ses *Experimental Researches in Electricity*¹⁶ : « Pendant que le fil métallique est soumis à l'induction volta-électrique ou magné-

¹³ C'est-à-dire quand $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ n'est pas identifiable au gradient d'un champ scalaire. Nous avons ici :

$$\{X, Y, Z\} = -\text{rot}\{\alpha, \beta, \gamma\}$$

¹⁴ Thomson reviendra en 1890 sur ces représentations mécanistes de l'électricité et du magnétisme, en tentant de leur donner un statut plus consistant que celui de simples modèles. Les manifestations électromagnétiques étaient alors pour lui la traduction d'états mécaniques d'un « éther gyrostatique » qu'il préférerait à sa « gelée » initiale rendant compte de son corps solide de 1846 ([47], pp. 329-334). Cette conception fit long feu.

¹⁵ Michael Faraday, né en 1791 à Southwark, mort en 1867 à Hampton Court. Sur l'oeuvre scientifique de Faraday, voir [41], pp. 159-185, ainsi que Cantor [7] et surtout Pearce Williams [35]. Sur la découverte de l'induction magnéto-électrique — en français : [14].

¹⁶ Ici, comme par la suite, nous indiquons seulement le paragraphe des *Experimental Researches* [13].

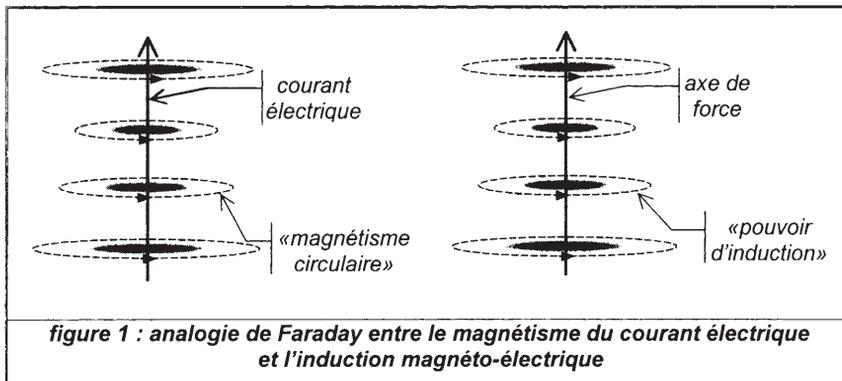
toélectrique, il semble être dans un état particulier puisqu'il y a résistance à l'établissement de courant électrique dans ce fil... Cet état électrique de matière n'a pas, jusqu'à maintenant, été identifié, mais il est probable qu'il exerce une influence importante dans beaucoup, sinon dans la plupart des phénomènes produits par des courants d'électricité... Après en avoir discuté avec plusieurs amis érudits, je me suis permis de qualifier cet état d'électro-tonique. »¹⁷ Ainsi, selon Faraday, tout conducteur soumis à une influence magnétique se trouve dans cet état qu'il qualifie d'électrotonique¹⁸ caractérisé par le fait que chacune de ses variations s'accompagne de l'induction de courants électriques.

Rappelons, s'il en est besoin, que les conceptions de Faraday ne devaient rien, ou si peu, à l'analyse mathématique. Mais, pour qualitatives qu'elles fussent, ces représentations étaient suffisamment précises et pertinentes pour n'avoir qu'à attendre leur heure afin d'être mathématisées. Ce fut le cas, par exemple, de cette simple *footnote* du paragraphe 114 de ses *Experimental Researches*, également rédigée en novembre 1831 : « *Par courbes magnétiques, j'entends les lignes de forces magnétiques... que représenterait la limaille de fer ; où celles auxquelles serait tangente une très petite aiguille aimantée.* » Remarque apparemment incidente aux conséquences insoupçonnées car il n'est pas exagéré d'y voir l'acte de naissance du concept de *champ magnétique*¹⁹. Puis, au paragraphe 118, Faraday d'ajouter ce qui s'avéra particulièrement clairvoyant pour la formalisation de son état électrotonique : « *Tous ces résultats montrent que le pouvoir d'induire des courants électriques est exercé de façon circulaire par une résultante, ou axe de force, magnétique tout comme le magnétisme circulaire dépend de et est produit par un courant électrique* » (cf. figure 1). Il fallut attendre encore vingt-quatre ans pour que ces notes et remarques trouvent habillage mathématique.

¹⁷ Considérant ensuite cette hypothèse comme superflue, Faraday la rejeta dans un premier temps pour finalement y revenir en 1851.

¹⁸ N'oublions pas que Faraday était féru d'étymologie grecque — ne lui devons-nous pas les termes *électrode*, *anode*, *cathode*, *diélectrique*, *ions*,... Le suffixe *-tonique* trouve donc son origine dans le *τονος* grec signifiant : *tension*, *force*, *énergie*.

¹⁹ En fait, l'idée de *champ* — en tant que fonction spatiale — existe déjà dans les travaux de Leonhard Euler (1707-1783), qui, bien avant Faraday, fut un adversaire résolu des théories admettant une action à distance. Avec ses lignes de force, Faraday donne un contenu physico-géométrique au concept de champ. Sur l'émergence de la théorie des champs, voir par exemple Balibar [2], pp. 12-53.



DU BIEN FONDE D'APPELER $-\partial A/\partial t$ « CHAMP DE NEUMANN »

Arrêtons-nous maintenant à quelqu'un qui, si le contexte théorique s'y était prêté, aurait probablement extrait le concept de potentiel vecteur de sa gangue formelle. En effet, en 1847, l'année même où paraît l'article de Thomson déjà cité, Franz Neumann²⁰ propose à l'Académie des Sciences de Berlin un mémoire s'intitulant : « Principe général de la théorie mathématique des courants électriques induits » [32]. Dans ce mémoire, qui fait suite et complète heureusement un autre mémoire écrit deux ans plus tôt ([31]), nous trouvons une première version mathématique de ce que nous appelons aujourd'hui la loi d'induction magnétoélectrique — à savoir : la force électromotrice induite dans un circuit fermé est égale à l'opposée de la dérivée temporelle totale du flux magnétique traversant ce circuit —, et qu'il conviendrait donc d'appeler *loi de Faraday-Neumann*. Le physicien allemand, qui usait d'un symbolisme mathématique personnel aujourd'hui obsolète, obtint ce résultat sur la base d'un raisonnement énergétique, ce qu'il appelait *force électromotrice (elektromotorische Kraft*²¹) correspondant à l'énergie électromagnétique d'un circuit. Toujours dans ce mémoire, nous pouvons reconnaître dans la loi élémentaire de

²⁰ Le physicien allemand Franz Ernst Neumann naquit en 1798 à Joachimstahl — à environ cinquante kilomètres au nord-est de Berlin — et mourut en 1895 à Königsberg. Ses travaux portèrent sur l'électromagnétisme, la conduction thermique, la cristallographie (réfraction anisotrope, dilatation,...). Sur ses recherches en électrodynamique : [21], vol. I, pp. 148-152.

²¹ Le mot *Kraft* a aussi en allemand l'acception *énergie* ; utiliser ce mot ici serait anachronique, eu égard au fait que la thermodynamique en était à ses tout débuts et que l'énergie n'acquiert un sens véritablement scientifique qu'au début des années 1850 avec — encore lui — William Thomson.

l'induction électrique qu'il proposait alors les prémisses de ce qui deviendra le champ électromoteur d'induction $\mathbf{E}(M, t)$ à savoir, \mathbf{v} représentant la vitesse locale d'un conducteur et \mathbf{A} notre potentiel vecteur :

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Il n'est donc pas fondamentalement illégitime d'appeler $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ *champ de Neumann...*

à ceci près que le physicien allemand ne pratiquait pas la notion physico-mathématique de *champ* — qu'il restait à inventer — et encore moins celle de *potentiel vecteur*.

Enfin, dans une annexe à ce même mémoire, nous trouvons ce que l'histoire en a surtout retenu, à savoir la fameuse *formule de Neumann* donnant l'expression du coefficient d'induction mutuelle entre deux circuits électriques filiformes. Là encore, il faut resituer ce résultat dans son contexte : chez Neumann, il est question du « *potentiel d'un circuit électrique en présence d'un autre circuit* », ce *potentiel* n'étant autre que notre *énergie potentielle d'interaction entre deux circuits*. Si (Γ_1) et (Γ_2) désignent les deux circuits filiformes en présence l'un de l'autre, ces circuits étant parcourus respectivement par des courants d'intensité i_1 et i_2 , la formule proposée par Neumann se traduirait aujourd'hui par — μ_0 désignant la *perméabilité magnétique du vide* et N_m un point quelconque d'un circuit (Γ_m) :

$$\mathcal{E}_{p1} = -\frac{1}{2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{d\mathbf{ON}_1 \cdot d\mathbf{ON}_2}{N_1 N_2} = \mathcal{E}_{p2}$$

Certes, il nous est loisible aujourd'hui de reconnaître dans :

$$\oint_{\Gamma_m} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_m d\mathbf{ON}_m}{N_m N_n}$$

l'expression du potentiel vecteur $A_m(N_n)$ créé par un courant filiforme fermé i_m en tout point N_n de l'espace. Mais là encore, Neumann eût bien été en peine de ressentir la nécessité de cette grandeur, d'autant qu'il semble — *a posteriori* évidemment — que le terreau conceptuel était plus favorable à son émergence dans le cadre du *mécanisme* à l'anglaise que dans celui de *l'énergétisme* à l'allemande.

THEORISATION DE L'ÉTAT ÉLECTROTONIQUE

Coïncidence de l'histoire ! Le physicien écossais James Clerk Maxwell²² naquit l'année même où Faraday découvrait l'induction. Il a donc vingt-quatre ans quand il entreprend de donner une tournure mathématique aux *lignes de force* de Faraday²³, travail qui se concrétise par la parution en 1856 d'un premier gros mémoire s'intitulant comme il se doit : « Lignes de force de Faraday » [23]. Dans la première partie de ce mémoire, Maxwell qui se place certes dans la lignée des travaux de Faraday, mais aussi de ceux de William Thomson auquel il fait souvent référence, Maxwell donc traite du mouvement d'un fluide incompressible, ce en vue d'un usage analogique ou plutôt, comme il le dira plus tard, *métaphorique* : « *Il ne s'agit pas d'un fluide hypothétique introduit pour expliquer les phénomènes [électriques et magnétiques] actuels. C'est seulement un ensemble de propriétés imaginaires qui peuvent être utilisées pour établir certains théorèmes de mathématiques pures d'une façon plus intelligible au plus grand nombre et plus applicable à des problèmes physiques que celle n'usant que de symboles algébriques* » ([23], p. 160). Il accompagne ainsi sa mathématisation des lignes de force de Faraday d'un outil que nous pourrions quasiment qualifier de pédagogique, les mouvements de ce fluide imaginaire ayant en quelque sorte pour fonction de faire passer l'abstraction du discours algébrique. Lorsqu'il aborde les lois de l'induction établies par Faraday, Maxwell note alors : « *Dans chacun de ces cas, la force électromotrice dépend de la variation du nombre de lignes de l'action magnétique inductive traversant le circuit. Il est naturel de supposer qu'une force de ce type, qui dépend d'une variation du nombre de lignes, est due à une variation de l'état qui est mesuré par le nombre de lignes.* » ([23], pp. 186-

²² James Clerk Maxwell, né en 1831 à Edimbourg, mort à Cambridge en 1879, produisit au cours de sa trop courte existence une œuvre dont Einstein put dire à juste titre qu'elle modifia notre conception de la réalité de façon « *la plus profonde qu'ait connue la physique depuis Newton* ». Indépendamment de ses travaux qui ont permis d'unifier les manifestations électriques, magnétiques et optiques de la nature en une même théorie synthétique, Maxwell apporta des contributions de première importance en mécanique (équilibre des solides élastiques, stabilité des anneaux de Saturne) et en thermodynamique (théorie cinétique des gaz) (cf [3] ; [5] ; [41], pp. 185-208).

²³ Notons au passage que cinq ans plus tôt, le très jeune Maxwell publiait un article s'intitulant : « *The equilibrium of elastic solids* » dans la lignée des travaux de Stokes... dont il suivit les cours. Cette même année 1850, il rencontra William Thomson, de sept ans son aîné, qui exerça une forte influence sur ses premiers travaux théoriques en électromagnétisme. Pour une présentation abrégée des travaux de Maxwell en électromagnétisme : [4], pp. 113-126 ; [8] ; notice de 42 pages de W. Garnett in [28] ; [33].

187). A la suite de Faraday, il qualifie cet état d'*électrotonique*, état auquel il consacre de longs développements dans la deuxième partie de son mémoire²⁴.

Dans cette seconde partie, Maxwell commence par énoncer une série de sept théorèmes, dont le cinquième, intéressant plus particulièrement notre propos, fut démontré par William Thomson en 1851 ; ce théorème stipule en substance que *tout champ vectoriel à divergence nulle dérive d'un autre champ vectoriel via un rotationnel, le deuxième champ vectoriel étant défini à un gradient près*. Après quoi, par le biais d'un raisonnement énergétique, Maxwell introduit ce qu'il appelle les « *fonctions électrotoniques ou composantes de l'intensité électrotonique* » $\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$, ces composantes étant liées aux forces électromotrices $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ — composantes de notre champ électromoteur de Neumann — par :

$$\alpha_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \alpha_0, \quad \beta_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \beta_0, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \gamma_0$$

Ceci établi, vient ensuite l'énoncé de six lois préfigurant partiellement ce qui deviendra les *équations intégrales de Maxwell*²⁵.

²⁴ Notons au passage que, dans cette deuxième partie, Maxwell traite les grandeurs électriques et les grandeurs magnétiques de façon totalement parallèle, voire analogue, au point de ne distinguer ces grandeurs non par le symbole mais par un simple indice — l'indice « 1 » pour les grandeurs magnétiques, et « 2 » pour les grandeurs électriques. En cela, il était totalement fidèle aux intuitions qualitatives de Faraday que nous avons rappelées plus haut.

²⁵ La cinquième loi énonce ce que nous appelons aujourd'hui le théorème de Maxwell concernant l'expression de l'énergie potentielle électromagnétique d'un circuit électrique placé dans un champ magnétique.

Arrêtons-nous à la première loi, à savoir : « *L'intensité électrotonique intégrale le long du contour limitant un élément de surface mesure la quantité d'induction magnétique qui passe à travers la surface ou, autrement dit, le nombre de lignes de force magnétiques passant à travers cette surface.* » ([23], p. 206) En termes modernes : *le flux magnétique à travers une surface est égal à la circulation du potentiel vecteur le long du contour limitant cette surface*²⁶... résultat qui permet à Maxwell de déduire aisément la loi d'induction de Faraday-Neumann — sixième loi. En résumé donc, dès 1856 et grâce à Maxwell, notre potentiel vecteur avait déjà l'essentiel de ses attributs physico-mathématiques sous l'appellation *composantes de l'intensité électrotonique*.

RETOUR A L'ANALOGIE DE THOMSON

Passent cinq années et en 1861 Maxwell revient sur la question de l'électromagnétisme en publiant un second gros mémoire : « Lignes de force physiques » [24]²⁷. Dans ce travail, il propose un modèle mécaniste — qu'il faut entendre avant tout non pas comme ce qui est, mais comme métaphore permettant de représenter les équations — ce afin de rendre compte des phénomènes électromagnétiques dans l'espace. Le modèle de Maxwell est constitué de *tourbillons moléculaires* — *molecular vortices*, symbolisés ci-après par les cellules hexagonales —, entre lesquels existent une sorte de roulement à billes²⁸. Un courant électrique entre les points A et B se traduit alors par le déplacement des billes qui mettent en mouvement les tourbillons dont la rotation est inversée de part et d'autre du courant.

²⁶ Pour énoncer ce résultat, comme celui de la troisième loi traduisant le théorème d'Ampère, Maxwell eut recours au fameux théorème de Stokes. Ce dernier avait été énoncé un an plus tôt, en 1854, par G.G. Stokes dans la huitième question du Prix Smith — un concours mathématique de très haut niveau : « Soient X, Y, Z des fonctions des coordonnées rectangulaires x, y, z, dS un élément d'une surface limitée, l, m, n les cosinus de l'angle d'inclinaison de la normale à dS par rapport aux axes, ds un élément de la ligne limitant [la surface], on montre que :

$$\iint \left(l \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) + m \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) + n \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \right) dS = \int \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

les coefficients différentiels de X, Y, Z étant partiels et l'intégrale simple étant prise sur tout le périmètre de la surface » ([43]). Un an plus tard, à la veille de rédiger « On Faraday's lines of force », Maxwell gagna ce prix en donnant, en particulier, une démonstration de ce théorème qui joue un rôle technique important dans la formalisation du concept de champ électromagnétique.

²⁷ Ce mémoire fut publié par morceaux entre mars 1861 et février 1862.

²⁸ Au passage, il serait totalement anachronique d'assimiler ces billes à nos électrons. Le concept de *charge électrique* chez Maxwell est en effet très éloigné de nos conceptions modernes.

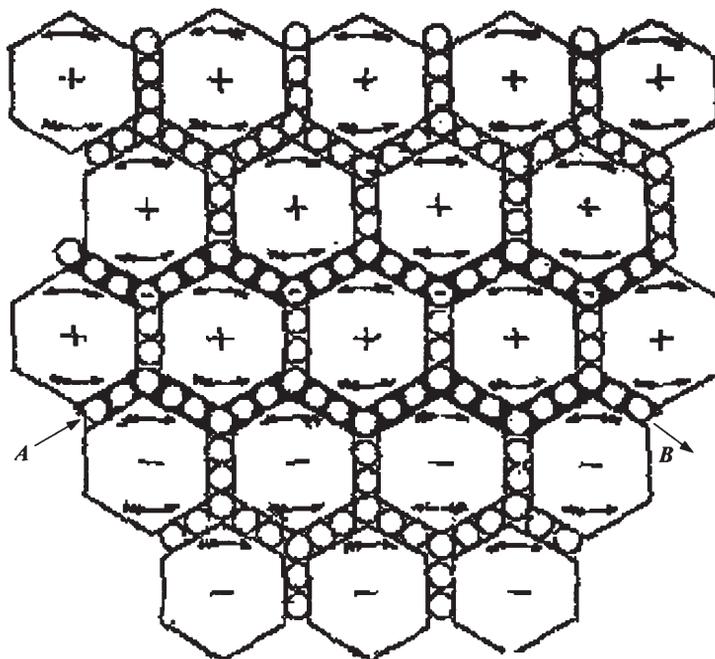


figure 2 : modèle des « molecular vortices » de Maxwell [24], p. 489

*A noter l'erreur typographique sur les tourbillons
de la deuxième série à partir du bas*

Si ce modèle ne constitue aujourd'hui qu'une curiosité historique et si Maxwell lui-même l'abandonna par la suite, il n'en reste pas moins qu'il a joué un rôle heuristique de premier plan. C'est en effet grâce à ces tourbillons moléculaires que Maxwell est conduit, toujours dans ce même mémoire, à introduire la notion de *déplacement électrique*, puis de *courant de déplacement électrique* et, subséquemment, à déduire l'existence « *de mouvements ondulatoires transverses* » dans le milieu hypothétique siège des tourbillons moléculaires. La célérité de ces ondes dans le vide, liée aux constantes électromagnétiques, s'avérant égale à celle de la lumière, Maxwell se sent alors en droit d'inférer que « *la lumière consiste en ondulations transversales du même milieu qui est la cause des phénomènes électriques et magnétiques* » ([24], p. 500). Là encore, toujours dans ce mémoire, Maxwell fait explicitement référence à William Thomson et à l'article que ce dernier écrit en novembre 1846 : il est cer-

tain que les tourbillons moléculaires leur doivent beaucoup. Maxwell identifie d'ailleurs les composantes du déplacement angulaire $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ de Thomson aux composantes de l'intensité électrotonique qu'il avait introduites dans son précédent travail, donnant du même coup une signification plus tangible au vecteur de Thomson. Mais, ce faisant, il changeait le signe de l'intensité électrotonique proposée en 1856 et, si la situation était restée en l'état, le champ magnétique aurait été lié au potentiel vecteur par la relation : $\mathbf{B} = -\text{rot}\mathbf{A}$... ce qui n'aurait en aucune manière bouleversé l'histoire de la physique.

PUIS VINT LE *MOMENTUM ELECTROMAGNETIQUE*

Toujours dans le mémoire de 1861-1862, Maxwell donne une autre interprétation analogique des composantes de l'intensité électrotonique. En effet, dans la modélisation tourbillonnaire proposée, le vecteur $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ joue un rôle analogue à l'impulsion « qui agirait sur l'axe d'une roue dans une machine ». Cette analogie mécanique va faire son chemin.

En effet, Maxwell sent assez vite la nécessité de s'abstraire de sa machinerie tourbillonnaire qui pouvait paraître artificielle. Cependant, comment évacuer la *machine* tout en restant dans le cadre du mécanisme métaphorique ? En ayant recours à la *mécanique analytique* et aux grandeurs généralisées — qui peuvent ne pas être du ressort de la mécanique au sens strict. C'est ce que fait Maxwell qui, fin octobre 1864, envoie à la *Royal Society* un mémoire de grande importance où sont unifiés en un même corpus théorique les phénomènes électriques, magnétiques et optiques et qui s'intitule : « Une théorie dynamique du champ électromagnétique » [25]²⁹.

C'est donc dans l'esprit de la mécanique analytique que Maxwell introduit en chaque point de l'espace un *momentum électromagnétique* à trois composantes F, G, H pour rendre compte des effets magnétiques des aimants ou des courants, la force généralisée associée à ce *momentum* ayant ainsi pour composantes — dans les notations de Maxwell :

²⁹ A titre indicatif, les différentes parties de ce mémoire s'intitulent : « *Induction électromagnétique* », « *Equations générales du champ électromagnétique* », « *Actions mécaniques dans le champ* », « *Théorie des condensateurs* », « *Théorie électromagnétique de la lumière* », « *Calcul des coefficients d'induction électromagnétique* ». A noter que les équations générales du champ électromagnétique données dans ce mémoire sont loin d'avoir la forme des équations dites de Maxwell que nous connaissons aujourd'hui — cf. annexe.

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}$$

Cette force généralisée correspond donc, là encore, à notre champ électromoteur de Neumann. Maxwell définit ensuite le *momentum électromagnétique* d'un circuit électrique comme étant l'intégrale du *momentum local* le long du circuit, identifiant cette intégrale au nombre de lignes de force magnétiques au travers du circuit ; et d'ajouter : « *Ce momentum électromagnétique est la même chose que ce que le professeur Faraday a appelé état électrotonique* » ([25], p. 556). Et enfin, Maxwell égalise la force magnétique — notre champ magnétique — au rotationnel du *momentum électromagnétique local* — sous forme d'égalités entre composantes. A ce stade, il nous vient deux remarques :

- Si Maxwell identifie le *momentum électromagnétique* d'un circuit à l'état électrotonique de Faraday, il ne fait pas référence aux composantes de l'intensité électrotonique qu'il avait introduites dans ses mémoires précédents ; en tout état de cause, le *momentum électromagnétique local* est identifiable de part son signe aux composantes du mémoire de 1856 et non à celles de 1861.
- Dans l'esprit de la mécanique analytique, la *force électromotrice induite* dans un circuit mérite alors tout à fait son appellation de *force* en tant que *force généralisée*, puisqu'elle est égale à l'opposée de la dérivée temporelle du *momentum électromagnétique* du circuit — loi de Faraday-Neumann.

ENFIN, LE POTENTIEL VECTEUR !

Nous avons pu remarquer que le signe du futur potentiel vecteur avait tendance à varier d'un mémoire de Maxwell à l'autre. L'une des raisons de ces fluctuations de signe réside probablement dans le fait qu'il fallait formaliser ce que nous appelons *l'orientation de l'espace*, ce que firent en particulier Hamilton³⁰, Tait³¹ et Maxwell lui-même ([26]) dans le cadre de la *théorie des quaternions* qui présente certaines similitudes avec celle de nos espaces vectoriels normés³².

³⁰ Qui forgea les termes *vecteur* — du latin *vector* : *porteur* — et *scalaire* — du latin *scalae* : *échelle*.

³¹ Peter Guthrie Tait, 1831-1901, physico-mathématicien écossais qui, entre autres, publia avec William Thomson *Elements of natural philosophy* en 1873, ouvrage où la mécanique de Lagrange était rendue accessible au commun des physiciens et pour lequel Maxwell s'enthousiasma.

³² Le véritable père de l'algèbre vectorielle reste néanmoins l'Allemand Hermann Günther Grassman (1809-1877), auteur par ailleurs de travaux importants en philologie.

Armé de ce nouvel outil mathématique et désireux de faire connaître sa théorie électromagnétique au plus grand nombre, Maxwell publie en 1873 un *Traité d'électricité et de magnétisme* [27], véritable monument de l'histoire de la physique qui reste encore plein d'enseignements pour qui veut sonder les arcanes de l'électromagnétisme³³.

C'est au paragraphe 405 du volume 2 qu'apparaît, pour la première fois, l'expression : « *Vecteur potentiel* »³⁴. Voici comment : « *L'induction magnétique à travers une surface limitée par une courbe fermée dépend de la courbe fermée, et non de la forme de la surface qui est limitée par elle ; il doit être possible de déterminer l'induction à travers une courbe fermée par un procédé ne dépendant que de la nature de cette courbe, et n'impliquant pas la construction d'une surface formant un diaphragme de la courbe* » ([27], vol. II, p. 29). Autrement dit, le flux magnétique à travers une surface ne dépend pas de la forme de cette surface mais seulement du contour qui la limite, il doit être possible d'exprimer ce flux en ne faisant intervenir que ce contour. Pour ce faire, Maxwell dispose du théorème de Stokes — qu'il rappelle au paragraphe 24 du premier volume — et il introduit donc un vecteur \mathbf{A} qu'il appelle « *vecteur potentiel de l'induction magnétique* ». Ce vecteur, lié au champ magnétique via un rotationnel, est tel que son intégrale sur un contour fermé est égale au flux magnétique à travers ce contour. Maxwell désigne cette grandeur de ce nom essentiellement par analogie avec le *potentiel scalaire*. En effet, de même qu'un champ vectoriel \mathbf{V} dérive d'un potentiel scalaire U par :

$$\mathbf{V} = -\text{grad}U = -\nabla U$$

de même un champ vectoriel dérive d'un potentiel vecteur \mathbf{A} par³⁵ :

³³ Même si certaines parties du *Traité* ont mal vieilli, principalement à cause d'impressionnantes pages noircies de calculs d'un autre âge.

³⁴ Notons toutefois que, deux ans plus tôt, dans un additif du 17 novembre 1871 à sa *Théorie mathématique du magnétisme*, William Thomson avait déjà introduit trois composantes L , M , N liées aux composantes X , Y , Z de la force résultante magnétique par :

$$X = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, \quad Y = \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, \quad Z = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}$$

et avait qualifié ces composantes de *potentiels* ; il n'usait cependant pas de l'expression *vecteur potentiel* ([46], pp. 394-395). Sur l'usage du potentiel vecteur par Maxwell : [6], pp. 55-56.

³⁵ Le formalisme de la théorie des quaternions usant de l'opérateur de Hamilton ∇ accentue d'ailleurs l'analogie formelle. En effet, l'opérateur de Hamilton appliqué à un champ vectoriel est constitué de deux parties : une partie scalaire — que Maxwell appelle « *convergence* » et qui correspond à notre *divergence* d'un champ vectoriel — et une partie vectorielle — correspondant à notre *rotation*-

$$\mathbf{V} = \text{rot}\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

Cette analogie est d'ailleurs renforcée au paragraphe 617 de ce même volume où est donnée l'expression du potentiel vecteur créé par un circuit électrique : « [Ce potentiel est] dans la même relation avec le courant électrique que celle du potentiel scalaire avec la matière dont il est le potentiel, et il est obtenu par un procédé similaire d'intégration qui peut être décrit ainsi : d'un point donné, traçons un vecteur représentant en module et direction un élément de courant électrique donné, divisé par la valeur numérique de la distance de cet élément au point donné. Faisons cela pour chaque élément du courant électrique. La résultante de tous ces vecteurs ainsi obtenue est le potentiel de l'ensemble du courant. Comme le courant est une quantité vectorielle, son potentiel est donc un vecteur » ([27], vol. II, p. 256)³⁶. Dans un article ultérieur, nous aurons l'occasion de revenir sur cette citation lorsqu'il s'agira de concrétiser quelque peu la notion de potentiel vecteur magnétique.

Enfin, au paragraphe 590, Maxwell identifie le *momentum électrocinétique* — déjà rencontré dans son mémoire de 1864 mais avec le qualificatif d'*électromagnétique* — à ce vecteur potentiel tout neuf, rejetant du même coup les composantes de l'*intensité électrotonique*, le *vecteur rotation magnétique* de Thomson et même le *momentum électromagnétique* dans l'obsolescence des oubliettes de l'histoire³⁷.

LA LOI DE FARADAY-THOMSON

Avant de poursuivre ces *fragments* historiques sur le potentiel vecteur, il convient de lier l'existence de cette grandeur à une propriété fondamentale du champ magnétique. En effet, en octobre 1851, Faraday exécuta toute une série d'expériences ingénieuses lui permettant de conclure aux paragraphes 3111 et 3112 de ses *Experimental Researches* : « De telles expériences montrent... qu'il n'y a ni perte, ni destruction, ni évanescence, ni état latent de la puissance magnétique avec la distance

nel. Pour que ∇A soit un vrai vecteur, Maxwell annule donc la partie scalaire, si bien que l'induction magnétique B est simplement liée à A par : $B = \nabla A$, ce en notations de Maxwell.

³⁶ Maxwell ajoute aussitôt qu'il y a unicité du potentiel vecteur régi par l'équation de Poisson, par le fait qu'il est de divergence nulle et par l'astreinte à tendre vers zéro à une distance infinie des sources magnétiques.

³⁷ Henri Poincaré (1854-1912), expert en mécanique lagrangienne et fin connaisseur des théories maxwelliennes, nota néanmoins dans son cours de physique mathématique fait à la Sorbonne durant le printemps 1888 : « Les quantités F , G , H ainsi introduites sont appelées par Maxwell les composantes du moment électro-magnétique (le mot moment est pris dans le sens quantité de mouvement) » ([36], vol I, p. 145). Dans la suite de ce cours, en 1890, il introduisit l'expression potentiel vecteur en référence au vecteur potentiel de Maxwell ([36], vol. II, p. 13).

(3111). *La convergence ou la divergence des lignes de force ne provoque pas de variation dans leur quantité (3112).* » Puis au paragraphe 3117 : « *Ainsi, il existe des lignes de force à l'intérieur de l'aimant, de même nature que celles à l'extérieur... Chaque ligne de force, quelle que soit sa distance par rapport à l'aimant, doit donc être considérée comme un circuit fermé, dont le contour passe en partie à travers l'aimant et dont la quantité de force reste égale en tout point de son contour* ». En langage moderne, Faraday établissait ainsi expérimentalement la *conservation du flux magnétique à travers une section d'un tube de champ magnétique*.

Par ailleurs, ce fut William Thomson qui, à notre connaissance, établit pour la première fois que la divergence — au sens mathématique du terme — du champ magnétique est nulle ([46], p. 395), ce qui traduit la conservation locale du flux magnétique. Aussi nous semble-t-il légitime d'associer les noms de *Faraday-Thomson* à l'équation souvent non attribuée³⁸ :

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(M,t) = 0$$

Dans son *Traité*, Maxwell souligne très clairement l'intime relation liant la conservation du flux magnétique, l'absence de divergence du champ magnétique et l'existence d'un champ potentiel vecteur. En effet, dans le paragraphe 402 du volume 2, il établit que : « *l'intégrale de surface de l'induction magnétique à travers toute surface fermée est nulle.* » Dans le paragraphe 403, il en déduit immédiatement que la divergence de l'induction magnétique est nulle et dans le 405 l'existence d'un vecteur potentiel. Nous verrons dans un article ultérieur que ces trois énoncés sont en fait totalement équivalents d'un point de vue mathématique.

L'APPORT DE HEAVISIDE ET DE HERTZ

Ce que, de nos jours, nous appelons *la théorie de Maxwell* est en fait assez éloigné de la version originelle de ladite théorie, tant dans la forme que parfois sur le fond³⁹.

³⁸ Le prix Nobel de physique Murray Gell-Mann lie directement cette équation à la conjecture d'Ampère selon laquelle il n'y a pas de charge magnétique indépendante ([16], p. 101). Il est vrai que cette équation traduit l'inexistence de monopôle magnétique, mais il nous semble plus juste de l'attribuer à ceux qui ont directement mis en évidence la loi qu'elle exprime. Notons par ailleurs que cette équation n'apparaît pas dans les équations originelles de Maxwell de 1864, mais est donnée dans le *Traité* de 1873, sans pour autant être considérée comme équation fondamentale ([27], vol. II, p. 248).

³⁹ A titre d'exemple et comme nous l'avons déjà signalé, la *charge électrique* de Maxwell n'a que peu de parenté avec ce que nous entendons aujourd'hui par « *charges électriques* » ; citons à ce propos l'excellent J.Z. Buchwald : « *Dans la théorie moderne, la charge est la source du champ électrique et*

Cette évolution résulta en particulier des travaux d'un groupe de physiciens, essentiellement d'origine anglo-saxonne et désignés sous le terme générique de *Maxwelliens* ; parmi eux, citons John William Strutt baron Rayleigh (1842-1919), Henry Augustus Rowland (1848-1901), Oliver Joseph Lodge (1851-1940), George Francis FitzGerald (1851-1901), John Henry Poynting (1852-1914), Edwin Herbert Hall (1855-1938), Joseph Larmor (1857-1942), avec une mention particulière pour Oliver Heaviside (1850-1925), Joseph John Thomson (1856-1940) et un converti d'importance — non britannique de surcroît : Heinrich Hertz (1857-1894)⁴⁰. L'expérience de Rowland (1878), la découverte un an plus tard par Hall de l'effet qui porte son nom, le théorème de Poynting sur la propagation de l'énergie électromagnétique (1884), etc... conduisirent ainsi à modifier profondément les conceptions premières du savant écossais⁴¹.

Quant aux potentiels, *quid* de leur évolution ? Les Maxwelliens, comme Maxwell lui-même, aimaient à concevoir, et même à construire des modèles mécaniques dont la dynamique était régie par des équations analogues aux équations électromagnétiques⁴². En 1885, FitzGerald réalisa un tel dispositif dont l'excellent fonctionnement conforta à ces yeux les équations de l'électromagnétisme... à ceci près que les potentiels n'y trouvaient aucune grandeur mécanique analogue, ce qui le porta à tenir ces derniers pour superflus ([19], pp. 114-116 ; [20], p. 66). Il n'était pas le premier à reléguer les potentiels dans l'accessoire : Oliver Heaviside, après avoir travaillé sur la propagation télégraphique⁴³, avait déjà trouvé qu'ils étaient plutôt encombrants pour formaliser les questions de propagation⁴⁴. Poursuivant son analyse de l'œuvre

le courant celle du champ magnétique. Dans la théorie de Maxwell, la charge est produite par le champ électrique ; le courant, au sens usuel du taux de variation de la charge par rapport au temps, n'est qu'indirectement lié au champ magnétique » ([6], p. 23).

⁴⁰ Sur la vie de Hertz, voir par exemple [40]. Hertz commença par adhérer à la théorie de Hermann von Helmholtz (1821-1894), concurrente de la théorie de Maxwell. Cette théorie usait elle aussi d'un potentiel vecteur qui coïncidait avec celui de Maxwell pour une certaine valeur d'un paramètre k à déterminer par l'expérience ([6], pp. 178-179). Sur l'importance de Helmholtz dans la science allemande du XIX^eme : [21], vol. II.

⁴¹ Sur ces questions, lire les passionnants développements de Buchwald ([6]) ; voir également Poincaré, [37].

⁴² Cf. [19], pp. 73-107 ; [30], pp. 66-67 ; [33], pp. 53-54. Poincaré décrit un certain nombre de ces modèles dans [38], pp. 7-14.

⁴³ Nous lui devons en effet l'équation dite *des télégraphistes* (1876). A partir de 1874, il se consacra quasiment en solitaire... et aux frais de sa famille à l'approfondissement de la théorie de Maxwell. Sur Heaviside, voir [19], pp. 48-72 ; [20], pp. 68-69 ; [30].

⁴⁴ Par exemple, dans le vide, les équations aux dérivées partielles régissant les potentiels ne se réduisent pas naturellement à des équations de propagation de d'Alembert. Henri Poincaré — qui ne semblait pas affecter la même prévention à l'encontre des potentiels que leurs contempteurs anglo-saxons — décrit dans son cours de 1888 la façon dont la question de la propagation de ces grandeurs

de Maxwell et ayant montré en même temps que Poynting que le flux d'énergie électromagnétique ne dépend que des champs électrique et magnétique, Heaviside entreprit ensuite de mettre à jour les équations nécessaires traduisant les phénomènes électromagnétiques : il formula ainsi en 1885 des équations remarquables de symétrie formelle... mais où les potentiels avaient disparu. Ce travail aurait pu n'avoir qu'un faible écho du fait de l'isolement intellectuel de son auteur si, peu de temps après, un jeune physicien allemand n'avait apporté son écot de faits expérimentaux et de réflexion théorique à l'oeuvre de Maxwell révisée par Heaviside.

En effet, fin 1887 et début 1888, Heinrich Hertz donna la preuve expérimentale de l'existence d'ondes électromagnétiques autres que lumineuses⁴⁵. Simultanément, et ce sans connaître les travaux de Heaviside, Hertz proposa lui-même un système d'équations régissant le champ électromagnétique dans « *l'éther libre* » ([17], pp. 147-148). Ces équations, identiques pour l'essentiel à celles de Heaviside, sont à peu de chose près celles enseignées aujourd'hui sous le label « *équations de Maxwell* », label qu'il ne serait que justice de compléter par les noms de Heaviside et de Hertz⁴⁶.

Les potentiels, nous le savons, n'apparaissent plus dans cette formulation ; se posait donc naturellement la question de leur utilité. Cette question souleva d'ardents débats au congrès de la *British Association for the Advancement of Science* qui eut lieu à Bath en septembre 1888 et où les expériences de Hertz tinrent évidemment la vedette. FitzGerald introduisit ainsi la communication de Rowland en annonçant que ce dernier allait procéder « *au meurtre* » du potentiel scalaire ! Peu de temps après, Heaviside, absent à ce congrès qui le fit néanmoins largement connaître grâce aux efforts de FitzGerald et de Lodge, écrivit quant à lui à ce même Lodge que son but n'était « *pas seulement le meurtre du ψ de Maxwell* [le potentiel scalaire], *mais aussi celui de ce merveilleux monstre à trois pattes avec un parasite scalaire sur le dos, à savoir le momentum électrocinétique* [le potentiel vecteur] » (cité dans [19], pp. 165-166, voir également [9]). Pourquoi tant de haine contre ces pauvres potentiels ?

était alors traitée : pour que le potentiel vecteur dans le vide puisse répondre à une équation de d'Alembert, il fallait supposer que le potentiel scalaire soit stationnaire et qu'une grandeur scalaire J — grandeur introduite par Maxwell et identifiable à la divergence du potentiel vecteur — soit nulle. Autrement dit, les physiciens d'alors se plaçaient dans le cadre de la jauge dite de Coulomb. Mais ces conditions impliquaient que le potentiel scalaire soit régi par une équation de Laplace, qui n'est pas une équation de propagation ([36], tome I, pp. 192-199).

⁴⁵ Cf. le très intéressant *Cahier de Science et Vie* de décembre 1995 consacré à Hertz.

Parce que la théorie ne pouvait accoucher d'équations de propagation des potentiels dignes de ce nom, alors que tel n'était pas le cas avec les champs. Plus pondéré que ses collègues britanniques, Hertz en conclut que, de même qu'un édifice une fois construit n'a plus besoin des échafaudages ayant servi à cette édification, de même la théorie de Maxwell n'avait plus besoin des potentiels utilisés lors de son élaboration, d'où la phrase citée en exergue. Désormais, comme il l'affirma ensuite en 1892 : « *La théorie de Maxwell, ce sont ses équations* », et ces équations ne portant que sur les champs électro-magnétiques, *exit* les potentiels.

EPILOGUE

Parallèlement à ces débats, de nombreux problèmes se cristallisèrent sur la notion de charge électrique : la montée en puissance d'une conception corpusculaire de l'électricité qui trouva son bien fondé avec la mise en évidence de l'électron par J.J. Thomson en 1897 heurtait de front le caractère fondamentalement *continuiste* de la théorie de Maxwell. « *Ce n'est pas que les maxwelliens étaient anti-atomistes... Cependant, ils croyaient fermement que la théorie électromagnétique... était plus fondamentale que la microstructure matérielle. Pour les Maxwelliens, le monde était fondamentalement un continuum, et les lois qui le gouvernait devaient être exprimées dans une forme mathématique adaptée.* » (Buchwald, [6], p. 23). Tel était le *continuo credo* des Maxwelliens. Le grand physicien hollandais Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)⁴⁷, suivant une démarche foncièrement pragmatique, se démarqua de ce credo et élaborà à partir de 1892 une théorie qui prolongeait celle de Maxwell tout en rejetant certains de ses aspects⁴⁸. En 1896, le physicien allemand Emil Wiechert (1861-1928), reprenant le terme *d'électron* introduit par George Johnstone Stoney (1826-1911) en 1891, désigna cette nouvelle théorie de Maxwell-Lorentz par *Elektronentheorie*. Afin de résoudre plus aisément les équations de l'électromagnétisme, Lorentz d'abord, puis Wiechert et Theodor des Coudres ensuite réintroduisirent les potentiels ([1], pp. 116-117 ; [29], pp. 32-34 ; [39], pp. 151-153).

⁴⁶ En 1890, Hertz rédigea un mémoire ([18]) plus complet sur la question où il reconnaissait la priorité de Heaviside dans la formulation des dites équations.

⁴⁷ Sur la vie et l'œuvre de Lorentz : [4], pp. 135-141 ; [29], pp. 18-40 ; [41], pp. 214-220.

⁴⁸ Entre autres choses, les charges électriques de Lorentz qu'il appelle *ions* ne sont plus ces lieux singuliers du champ électromagnétique définis par Maxwell, mais sont des entités ayant des caractéristiques qui, comme l'inertie, étaient alors propres à la matière.

Les problèmes rencontrés par les Maxwelliens pour formaliser leur propagation furent levés grâce à ce que nous appelons aujourd'hui la *Jauge de Lorentz* : cette condition supplémentaire permettant en effet de lever l'indétermination des potentiels, ces derniers prennent alors la forme dite des *potentiels retardés*. Ainsi les potentiels renaissent-ils de leurs cendres, mais avec le statut de simples auxiliaires de calcul, la jauge de Lorentz ayant par ailleurs tous les attributs d'une clause de commodité⁴⁹. Il faudra attendre encore longtemps — le début des années 1960 — pour que ces potentiels acquièrent enfin leurs galons de grandeurs physiques à part entière par le biais de *l'effet Bohm-Aharonov* dont nous parlerons dans un article ultérieur. Or, ironie de l'histoire, ce ne sera pas la théorie de Maxwell-Lorentz qui permettra cela, mais la mécanique quantique qui limita de façon drastique le domaine d'application de cette première.

A suivre

NDLR : cet article est le premier d'une série consacrée au potentiel vecteur. Le deuxième article est également publié dans ce numéro. Faute de place, nous ne pouvons pas publier les suivants dans le même numéro. Ils seront publiés ultérieurement et/ou disponibles en téléchargement sur le serveur de l'UdP.

⁴⁹ En fait, cette condition de jauge liant le potentiel vecteur et le potentiel scalaire, avait été trouvée dès 1888 par FitzGerald qui ne la publia qu'en 1890 — pour qu'une équation de d'Alembert régisse le potentiel scalaire, il faut que la dérivée partielle par rapport au temps de ce dernier soit proportionnelle

ANNEXE
DES EQUATIONS PROPOSEES PAR MAXWELL
AUX ACTUELLES « EQUATIONS DE MAXWELL »

Le *génial* Professeur Richard Feynman (1918-1988) notait dans son *Cours de physique* et avec quelque emphase : « Une longue revue de l'histoire de l'humanité — faite sur, disons, dix mille ans à partir de maintenant — montrera sans le moindre doute que la découverte par Maxwell des lois de l'électrodynamique est l'événement le plus important du XIX^e siècle. Comparée à cet important événement scientifique de la même décennie, la guerre de Sécession s'évanouira dans l'insignifiance provinciale. » ([15], p. 1.16). A en voir l'incidence de l'électromagnétisme sur la vie de tous les jours et sur l'évolution de l'humanité, cette affirmation se révèle être à peine exagérée.

Parlant des équations de Maxwell, Pierre Gilles de Gennes évoque quant à lui, avec poésie et justesse, « quatre équations d'une pureté de diamant » ; mais il ajoute : « Vers 1867, le physicien anglais James Clerk Maxwell... rassemble dans quatre lignes d'équations tous les phénomènes connus à son époque qui mettent en jeu des courants, des champs électriques, des champs magnétiques » ([11], p. 54). L'article qui précède montre à l'envi que ce ne fut pas aussi simple que cela. En effet, dans son mémoire de 1864 et après avoir recensé vingt variables régissant tout problème d'électromagnétisme, Maxwell proposa donc vingt équations permettant de les déterminer. Ces grandeurs variables étaient les suivantes⁵⁰ :

- le « moment électromagnétique » [potentiel vecteur A],
- « l'intensité magnétique » [excitation magnétique H],
- la « force électromotrice » [champ électrique global E],
- le « courant dû à la vraie conduction » [densité de courant de conduction J],
- le « déplacement électrique » [l'excitation électrique D],
- le « courant total incluant les variations du déplacement » J' ,
- la quantité d'électricité libre [densité d'électricité ρ],
- et le potentiel électrique V .

à la grandeur J citée en note 44. Ne voyant pas de réalité physique dans les potentiels, FitzGerald ne donna guère suite à sa trouvaille ([19], pp. 117-118).

⁵⁰ Données en notations modernes, chaque vecteur correspondant à trois composantes variables. Rappelons que l'interprétation maxwellienne de ces grandeurs, en particulier celle de la charge et du courant électriques, n'est pas celle retenue aujourd'hui.

Le milieu étant quant à lui caractérisé par les coefficients ϵ , μ et γ qui désignent respectivement la permittivité électrique — inverse d'une « *élasticité électrique* » —, la perméabilité magnétique — ou « *coefficient d'induction magnétique* » — et la conductivité électrique — inverse d'une « *résistance spécifique* » —, v représentant enfin la vitesse instantanée d'un conducteur élémentaire, les équations proposées par Maxwell en 1864 étaient celles-ci :

$$\ast \text{ l'« équation des courants totaux » : } \mathbf{J}' = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ;$$

$$\ast \text{ l'« équation de la force magnétique » : } \mu \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} ;$$

$$\ast \text{ l'« équation des courants » : } \text{rot} \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J}' ;$$

$$\ast \text{ l'« équation de la force électromotrice » : } \mathbf{E} = v \wedge \mu \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} V ;$$

$$\ast \text{ l'« équation de l'élasticité électrique » : } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} ;$$

$$\ast \text{ l'« équation de la résistance électrique » : } \mathbf{E} = -\frac{1}{\gamma} \mathbf{J} ;$$

$$\ast \text{ l'« équation de l'électricité libre » : } \text{div} \mathbf{D} + \rho = 0 ;$$

$$\ast \text{ l'« équation de continuité » : } \text{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

Nous constatons que \mathbf{J} et ρ diffèrent des densités utilisées actuellement par leur signe. Cette différence disparaît dans le *Traité* de 1873..., mais le nombre de variables considérées alors par Maxwell étant de neuf variables vectorielles et de quatre scalaires — dans le cadre de la théorie des quaternions —, il lui fallait donc trente et une équations portant sur trente et une grandeurs composantes et scalaires, si bien que, paradoxalement, la version des équations de Maxwell du *Traité* est plus éloignée de nos équations modernes que celle de 1864, d'autant qu'il y est question de « *potentiel scalaire magnétique* » et de « *densité de matière magnétique* ». Il convient de remarquer que les potentiels \mathbf{A} et V apparaissent expressément dans les équations proposées par Maxwell, équations qui ne présentent évidemment pas la symétrie formelle que leur ont donnée Heaviside et Hertz par la suite.

Mais il convient tout pareillement de noter que si ces équations originelles semblent bien nombreuses, les quatre équations à la « pureté de diamant » ne suffisent pas pour autant à résoudre un problème d'électromagnétisme. Rappelons en effet ces équations en notations usuelles :

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(M,t) = 0 \quad ; \quad \operatorname{div}\mathbf{D}(M,t) = \rho_{\text{lib}}(M,t)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(M,t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(M,t) \quad ; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}(M,t) = \mathbf{J}_{\text{lib}}(M,t) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(M,t)$$

Nous sommes en présence de 16 inconnues scalaires ou composantes pour seulement 8 équations scalaires ou composantes. En exprimant les équations caractéristiques du milieu — supposé linéaire, homogène et isotrope pour simplifier —, nous avons en plus :

$$\mathbf{D}(M,t) = \epsilon\mathbf{E}(M,t) \quad ; \quad \mathbf{B}(M,t) = \mu\mathbf{H}(M,t)$$

Aux 14 équations précédentes, il faut ajouter l'équation du courant de conduction — avec, toujours pour simplifier, un seul type de porteurs de charge libres —, soit :

$$\mathbf{J}_{\text{lib}}(M,t) = \rho_{\text{lib}}(M,t)\mathbf{v}(M,t)$$

Nous avons alors 17 équations... mais le nombre d'inconnues passe maintenant à 19 puisqu'il faut ajouter les composantes de la vitesse d'ensemble des porteurs libres. Cette vitesse étant régie par une équation mécanique — du type équation d'Euler —, nous obtenons avec celle-ci 20 équations, la vingtième inconnue étant la masse par unité de volume de ces porteurs libres — nous ne sommes pas censés *a priori* connaître la nature de ces porteurs. D'où, là encore, nécessité de 20 équations pour 20 inconnues !

SOURCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. Abraham, « Prinzipien der Dynamik des Elektrons », *Annalen der Physik*, X, 1903, pp. 105-179.
- [2] F. Balibar, *Einstein 1905, de l'éther aux quanta*, Presses Universitaires de France-Paris, 1992.
- [3] F. Balibar, « James Clerk Maxwell, un gentleman aux champs », *Les cahiers de Science et Vie*, n° 17, octobre 1993, pp. 6-12.
- [4] E. Bauer, *L'électromagnétisme hier et aujourd'hui*, Albin Michel-Paris, 1949.
- [5] M. Blay, « Maxwell : le premier physicien contemporain », *La Recherche*, XI, n° 109, mars 1980, pp. 330-333.
- [6] J.Z. Buchwald, *From Maxwell to Microphysics, Aspects of Electromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century*, University of Chicago Press-Chicago, 1985.
- [7] G. Cantor, *Michael Faraday, Sandemanian and Scientist*, The Macmillan Press-Londres, 1991.
- [8] J. Cazenobe, « Maxwell, précurseur de Hertz ? », *La Recherche*, XV, n° 157, juillet-août 1984, pp. 972-986.
- [9] G. Chevalier, « Formation d'un quatuor », *Les cahiers de Science et Vie*, n° 30, décembre 1995, pp. 68-73.
- [10] O.D. Chwolson, *Traité de Physique, Champ Magnétique Variable (tome V, premier fascicule)*, trad. E. Davaux, Hermann-Paris, 1914.
- [11] P.G. de Gennes et J. Badoz, *Les objets fragiles*, Plon-Paris, 1994.
- [12] B. Dupont et J. Trotignon, *Unités et grandeurs, symboles et normalisation*, Nathan-Paris, 1994.
- [13] M. Faraday, *Experimental researches in electricity*, 3 volumes, Taylor and Francis-Londres, 1839-1855.
- [14] M. Faraday, *Extraits des Recherches expérimentales en électricité*, présenté par G. Hirtz, Gauthier Villars, Paris, 1967.
- [15] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Le cours de physique de Feynman - traitant surtout de l'électromagnétisme et de la matière (deux volumes)*, trad. A. Crémieu et M.L. Duboin, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [16] M. Gell-Mann, *Le quark et le jaguar*, Albin Michel-Paris, 1995.
- [17] H. Hertz, « Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie » (1888), in *Gesammelte Werke von Heinrich Hertz, tome II (Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft)*, J.A. Barth-Leipzig, 1894, pp. 146-170.
- [18] H. Hertz, « Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper » (1890), in *Gesammelte Werke von Heinrich Hertz, tome II (Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft)*, J.A. Barth-Leipzig, 1894, pp. 208-255.
- [19] B.J. Hunt, *The Maxwellians*, Cornell University Press-Ithaca and London, 1994.
- [20] B.J. Hunt, « La moisson des Maxwelliens », *Les cahiers de Science et Vie*, n° 17, octobre 1993, pp. 62-70.

- [21] C. Jungnickel et R. McCormach, *Intellectual Mastery of Nature, Theoretical Physics from Ohm to Einstein* - Volume 1 : *The Torch of Mathematics, 1800-1870* ; Volume 2 : *The Now Mighty Theoretical Physics, 1870-1925*, University of Chicago press-Chicago, 1986.
- [22] J.C. Maxwell, *The scientific papers of James Clerk Maxwell*, deux tomes reliés en un volume, publié par W.D. Niven, Dover- New York, 1952 (première édition : 1890).
- [23] J.C. Maxwell, « On Faraday's lines of force » (1855-1856), *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, X ; [22], tome I, pp. 155-229.
- [24] J.C. Maxwell, « On physical lines of force » (1861-1862), *Philosophical Magazine*, XXI ; [22], tome I, pp. 451-513.
- [25] J.C. Maxwell, « A dynamical Theory of the Electromagnetic Field » (1864), *Royal Society Transactions*, CLV ; [22], tome I, pp. 526-597.
- [26] J.C. Maxwell, « On the mathematical classification of physical quantities » (1871), *Proceedings of the London Mathematical Society*, III, n° 34 ; [22], tome II, pp. 257-266.
- [27] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, 2 volumes, Dover-New York, 1954 — cette édition reprend la troisième édition de 1891 du traité.
- [28] J.C. Maxwell, *Traité élémentaire d'électricité*, trad. G. Richard, Gauthier Villars-Paris, 1884.
- [29] A.I. Miller, *Albert Einstein's Special Theory of Relativity, Emergence (1905) and Early Interpretation (1905-1911)*, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [30] P. Nahin, « Oliver Heaviside », *Pour la Science* n° 154, 08- 1990, pp. 84-91.
- [31] F. Neumann, « Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme », *Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften*, 1845 ; in *Franz Neumanns gesammelte Werke*, Teubner-Leipzig, 1912, Krausreprint-Liechtenstein, 1979, pp. 259-340.
- [32] F. Neumann, « Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme », *Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften*, 1847 ; in *Franz Neumanns gesammelte Werke*, Teubner-Leipzig, 1912, Krausreprint- Liechtenstein, 1979, pp. 347-409.
- [33] M. Norton Wise, « Enlacements dans l'éther, signaux sous la mer », *Les cahiers de Science et Vie*, n° 17, octobre 1993, pp. 44-61.
- [34] H.C. Oersted, « Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam », in *H.C. Oersted Scientific papers, Collected edition with two essays on his work by K. Meyer, volume II*, A.F. Host-Copenhagen, 1920, pp. 214-217.
- [35] L. Pearce Williams, *Michael Faraday*, Da Capo Press-New York, 1965.
- [36] H. Poincaré, *Cours de physique mathématique, électricité et optique*, en deux tomes reliés en un volume, Carré-Paris, 1890-1891.
- [37] H. Poincaré, « A propos des expériences de M. Crémieu » (1901), in *L'analyse et la Recherche*, Hermann-Paris, 1991.
- [38] H. Poincaré, *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes*, Collection Scientia, Naud-Paris, 1904.
- [39] W. Ritz, « Recherches critiques sur l'électrodynamique générale », *Annales de Chimie Physique*, XIII, 1908, pp. 145-275.

- [40] A. Rolland, « L'impatience du savoir », *Les cahiers de Science et Vie*, n° 30, décembre 1995, pp. 5-14.
- [41] E. Segrè, *Les physiciens classiques et leurs découvertes, de la chute des corps aux ondes hertziennes*, Fayard-Paris, 1987.
- [42] G.G. Stokes, « On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, VIII, p. 287, 1845 ; in *Mathematical and Physical Papers of Sir G.G. Stokes*, vol I, Cambridge University Press, 1880, pp. 75-129.
- [43] G.G. Stokes, Smith's Prize Examination Papers, février 1854, in *Mathematical and Physical Papers of Sir G.G. Stokes*, vol V, Cambridge University Press, 1880, pp. 320-321.
- [44] R. Taton et al., *Histoire générale des sciences*, Presses Universitaires de France-Paris, Tome 3-1 (Le XIXeme siècle), 1961.
- [45] W. Thomson, « On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces », *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, II, 1847 ; in *Mathematical and Physical Papers by Sir W. Thomson*, University Press-Cambridge, 1882, pp. 76-80.
- [46] W. Thomson, « A mathematical theory of magnetism », in *Reprint of papers on electrostatics and magnetism*, Macmillan & Co- Londres, 1872, pp. 340 et sqq.
- [47] W. Thomson, « Représentations mécaniques du champ magnétique », in *Conférences scientifiques et allocutions*, présentées par M. Brillouin, trad. P. Lugol, Gauthier Villars-Paris, 1893, pp. 326-334.

Nous avons également consulté : *Inventeurs et Scientifiques, dictionnaire de biographies* (Larousse-Paris, 1994) et, n'en déplaise à certains puristes de l'histoire des sciences, *Les cahiers de Science et Vie* consacrés à Maxwell (n° 17, octobre 1993) et à Hertz (n° 30, décembre 1995).

* * *