LE DOUBLE PRODUIT VECTORIEL : UN OUTIL MECONNU

JEAN SIVARDIERE

CEA / Département de Recherche Fondamentale sur la Matière Condensée / MRS 38054 Grenoble Cedex 9, France

Les ouvrages élémentaires de physique n'utilisent que des notions succinctes de calcul vectoriel : les produits scalaire et vectoriel de deux vecteurs, et le produit mixte de trois vecteurs. L'introduction du double produit vectoriel ne fait appel à aucun concept nouveau : elle est "payante", car elle intervient dans de nombreux problèmes géométriques et physiques.

1. Formule de Gibbs

Le double produit vectoriel $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ est un vecteur perpendiculaire au vecteur $\vec{B} \wedge \vec{C}$, donc situé dans le plan $\vec{B}, \vec{C}$. Son expression est donnée par la formule de Gibbs, qui se vérifie en observant que ses deux membres ont des coordonnées cartésiennes identiques (on peut aussi en donner une démonstration géométrique, plus élégante car indépendante de tout système de coordonnées) :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \,.\, \vec{C})\, \vec{B} - (\vec{A} \,.\, \vec{B})\, \vec{C} \qquad (1)$$

ou de manière équivalente :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = (\vec{A} \,.\, \vec{C})\, \vec{B} - (\vec{B} \,.\, \vec{C})\, \vec{A} \qquad (2)$$

2. Interaction entre deux charges

Considérons deux charges q_1 et q_2 animées des vitesses respectives $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. D'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique créé par q_1 et agissant sur q_2 est :

$$\vec{B_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^2}\, \vec{v_1} \wedge \vec{r}$$

($\vec{r}$ est la distance de q_1 à q_2). D'où les forces de Lorentz agissant entre les deux charges :

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{v}_2 \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{r})$$
$$\vec{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{r}) \qquad (3)$$

D'après la formule de Gibbs, si on ignore l'impulsion du champ électromagnétique, la loi de l'action et de la réaction n'est pas satisfaite dans le cas général. Elle ne l'est que si les vitesses des deux charges sont parallèles.

3. Volume d'un parallélépipède

Le volume orienté v du parallélogramme construit sur les trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est égal au produit mixte $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}$. Cherchons une expression intrinsèque de v. D'après l'identité de Lagrange, on a :

$$\left|\vec{B} \wedge \vec{C}\right|^2 = B^2 C^2 - (\vec{B} \cdot \vec{C})^2$$

d'où :

$$\left|\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})\right|^2 = A^2 \left|\vec{B} \wedge \vec{C}\right|^2 - (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})^2$$

En utilisant la formule de Gibbs, on trouve :

$$v^2 = A^2 B^2 C^2 + 2(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{C} \cdot \vec{A}) - A^2(\vec{B} \cdot \vec{C})^2 - B^2(\vec{C} \cdot \vec{A})^2 - C^2(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \qquad (4)$$

ou encore, d'après la règle de Sarrus :

$$v^2 = \begin{vmatrix} \vec{A}.\vec{A} & \vec{A}.\vec{B} & \vec{A}.\vec{C} \\ \vec{A}.\vec{B} & \vec{B}.\vec{B} & \vec{B}.\vec{C} \\ \vec{A}.\vec{C} & \vec{B}.\vec{C} & \vec{C}.\vec{C} \end{vmatrix}$$

Ce résultat est généralement démontré analytiquement, à partir de l'expression de v sous forme du déterminant des coordonnées des vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ dans une base orthonormale. Considérons alors la maille élémentaire d'un cristal, de côtés a, b, c et d'angles α, β, γ, définie par les vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ($|\vec{A}| = a$, ...). D'après (4), son volume v est donné par :

$$v^2 = a^2 b^2 c^2 (1 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma) \quad (5)$$

4. Formules de Lagrange

A partir de la formule de Gibbs, on obtient immédiatement les formules dites de Lagrange relatives à des produits de 4 vecteurs, qui seront utilisées plus bas. On peut écrire :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = \vec{A} \cdot \left[\vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D})\right]$$

d'où la première formule de Lagrange :

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (6)$$

On obtient de même la deuxième formule de Lagrange :

$$\begin{aligned}(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D}) &= \left[(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{D}\right]\vec{C} - \left[(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C}\right]\vec{D} \\ &= \left[\vec{A} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})\right]\vec{B} - \left[\vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})\right]\vec{A}\end{aligned} \quad (7)$$

5. Trigonométrie sphérique

Considérons un triangle sphérique ABC sur la sphère unité centrée à l'origine O ($\vec{OA} = \vec{A}$, ...) : a, b, c sont les longueurs des côtés ; α, β, γ sont les angles dièdres. Nous supposons, sans perte de généralité, que a, b et c sont inférieurs à π (ABC est appelé triangle d'Euler) et que le trièdre $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ est droit. La première formule de Lagrange avec $\vec{D} = \vec{A}$ donne la première relation des cosinus :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha \quad (8)$$

Considérons maintenant le triangle sphérique A'B'C' polaire de ABC : A' est le pôle à gauche du grand cercle passant par BC, ce point est situé du même côté du plan OBC que A puisque le trièdre $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ est droit. Les côtés et angles du triangle polaire sont donnés par $a' + \alpha = \pi$, $\alpha' + a = \pi$. La formule (8) appliquée à ce triangle fournit la deuxième relation des cosinus :

$$\cos\alpha = -\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos a \quad (9)$$

La seconde formule de Lagrange avec $\vec{D} = \vec{A}$ donne :

$$v = \sin b \sin c \sin\alpha$$

d'où la relation des sinus :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c} \qquad (10)$$

Les formules (8), (9) et (10), dites formules de Gauss, sont très utiles en astronomie et dans de nombreux problèmes de géométrie (produit de deux rotations) et de physique (étude de la maille réciproque d'une maille cristallographique). Leurs démonstrations géométriques traditionnelles sont très lourdes.

6. Décomposition d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire et $\vec{V}$ un vecteur quelconque. Si on pose $\vec{A} = \vec{C} = \vec{u}, \vec{B} = \vec{V}$, la formule de Gibbs s'écrit :

$$\vec{V} = \left(\vec{u} \,.\, \vec{V}\right)\vec{u} - \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{V}) \qquad (11)$$

On voit que le produit scalaire fournit la composante de $\vec{V}$ parallèle à $\vec{u}$ et le double produit vectoriel sa composante perpendiculaire à $\vec{u}$.

Considérons le mouvement de rotation d'un point M, de masse m de vecteur position $\vec{r}$, autour d'un axe passant par l'origine O et décrit par le vecteur $\vec{\omega}$. La vitesse de M est $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Son accélération normale est donnée par le double produit vectoriel $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$: d'après ce qui précède, elle est donc égale à $-\overrightarrow{HM}$, H étant la projection de M sur l'axe de rotation. De même son moment cinétique $\vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)$ est égal à $m\,r^2$ fois la composante de $\vec{\omega}$ perpendiculaire à $\vec{r}$.

7. Rotation d'un vecteur

Dans une rotation d'angle θ autour de $\vec{u}$, la composante de $\vec{V}$ parallèle à $\vec{u}$ est conservée, d'où les expressions suivantes de l'image $\vec{V}'$ de $\vec{V}$:

$$\begin{aligned} \vec{V}' &= \left(\vec{u} \,.\, \vec{V}\right)\vec{u} - \cos\theta\, \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{V}) + \sin\theta\, \vec{u} \wedge \vec{V} \\ &= \cos\theta\, \vec{V} + (1 - \cos\theta)\left(\vec{u} \,.\, \vec{V}\right)\vec{u} + \sin\theta\, \vec{u} \wedge \vec{V} \end{aligned} \qquad (12)$$

La deuxième expression (12) de $\vec{V}'$ fournit aisément la matrice de Gibbs représentant la rotation dans une base orthonormée. Les cosinus directeurs de $\vec{u}$ étant notés α, β, γ, l'opérateur $\vec{u}\,\wedge$ est en effet représenté par la matrice antisymétrique :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

d'où la matrice de Gibbs, de trace $1 + 2 \cos\theta$:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\,\theta + (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\alpha^2 & (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\alpha\,\beta - \gamma\,\mathrm{Sin}\,\theta & (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\alpha\,\gamma + \beta\,\mathrm{Sin}\,\theta \\ (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\alpha\,\beta + \gamma\,\mathrm{Sin}\,\theta & \mathrm{Cos}\,\theta + (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\beta^2 & (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\beta\,\gamma - \alpha\,\mathrm{Sin}\,\theta \\ (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\alpha\,\gamma - \beta\,\mathrm{Sin}\,\theta & (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\beta\,\gamma + \alpha\,\mathrm{Sin}\,\theta & \mathrm{Cos}\,\theta + (1-\mathrm{Cos}\,\theta)\,\gamma^2 \end{pmatrix}$$

8. Mouvement d'un corps solide

Considérons un solide en mouvement et un trièdre 0xyz attaché à ce solide : soit, à un instant donné, $\vec{v}_0$ la vitesse du point O par rapport à un repère fixe et $\vec{\omega}$ le vecteur vitesse de rotation du solide par rapport à O. La vitesse d'un point M situé en $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Cherchons les points dont la vitesse est parallèle à $\vec{\omega}$. En écrivant $\vec{\omega} \wedge \vec{v} = 0$, on obtient :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0 = -\,\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

On reconnait au second membre, au facteur ω^2 près, la composante de $\vec{r}$ perpendiculaire à $\vec{\omega}$. Par conséquent les points M cherchés sont ceux de la droite D parallèle à $\vec{\omega}$ et passant par le point O' tel que :

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0}{\omega^2} \qquad (13)$$

Tous les points de D ont la même vitesse, égale à la projection de $\vec{v}_0$ sur $\vec{\omega}$. La vitesse d'un point M quelconque défini par $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$ s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{\left(\vec{\omega}\,.\,\vec{v}_0\right)\vec{\omega}}{\omega^2} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\,' \qquad (14)$$

On voit que le mouvement instantané du solide est hélicoïdal : il résulte de la composition d'une translation parallèle à D de vitesse $\left(\vec{\omega}\,.\,\vec{v}_0\right)\vec{\omega}/\omega^2$ et d'une rotation autour de D de vitesse angulaire $\vec{\omega}$ (ce mouvement instantané, appelé mouvement tangent, fournit les vitesses du mouvement réel, mais non les accélérations).

9. Mouvement de Képler

Le mouvement d'une masse m soumise à une force centrale newtonienne est décrit par l'équation :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \alpha \frac{\vec{u}}{r^2} \qquad (15)$$

$\vec{u}$ désigne le vecteur position unitaire : $\vec{r} = r\,\vec{u}$. Le moment cinétique $\vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$, qui est une constante du mouvement puisque la force est centrale, peut s'écrire :

$$\vec{L} = m r^2\, \vec{u} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt}$$

d'où :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{L} = - \alpha\, \vec{u} \wedge \left(\vec{u} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \qquad (16)$$

On reconnait, au deuxième membre, au facteur α près, la composante de $\frac{d\vec{u}}{dt}$ perpendiculaire à $\vec{u}$, qui n'est autre que $\frac{d\vec{u}}{dt}$ puisque $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$, $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$. En intégrant (16) par rapport au temps, on obtient l'invariance du vecteur de Laplace $\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{L} - \alpha\, \vec{u}$, caractéristique du problème de Képler, d'où on déduit classiquement le caractère elliptique de l'orbite. On obtient de même :

$$\vec{L} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} = - m r^2 \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)^2 \vec{u}$$

$$= - \frac{L^2}{m r^2}\, \vec{u}$$

d'où, en utilisant (15) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\alpha}{L^2}\, \vec{L} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt}$$

et, en intégrant par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{\alpha}{L^2}\, \vec{L} \wedge \vec{u} + \vec{S}$$

Ce résultat montre que l'hodographe du mouvement est un cercle de rayon α/L dont le centre est défini dans l'espace des vitesses par le vecteur invariant de Hamilton $\vec{S}$.

10. Rayonnement d'une charge accélérée

Une particule de charge q subissant l'accélération $\vec{a}$ produit au point $\vec{r}$ les champs :

$$\vec{E} = \frac{q}{4 p \varepsilon_0 c^2 r^3} \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{a})$$

$$\vec{B} = \frac{q}{4 p \varepsilon_0 c^3 r^2} \vec{a} \wedge \vec{r}$$

dans l'hypothèse où la vitesse de q est très inférieure à celle de la lumière. Soit θ l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{r}$. L'énergie rayonnée dans la direction θ est proportionnelle au module du vecteur de Poynting $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{B}$. Le champ $\vec{E}$ étant proportionnel à la composante de l'accélération normale à $\vec{r}$, et les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant perpendiculaires, on voit immédiatement que la distribution angulaire du rayonnement d'énergie est en $\sin^2\theta$.

BIBLIOGRAPHIE

G. ARKFEN, *Mathematical methods for physicists*, Academic Press, New-York (1985).

D. McKIE et C. McKIE, *Essentials of Cristallography*, Blackwell Scientific Publications, Oxford (1986).

W. PANOVSKY et M. PHILLIPS, *Classical electromagnetism*, Addison-Wesley, Reading (1962).

J. SIVARDIERE, "Comparaison entre le mouvement de Képler et le mouvement harmonique", BUP n°751 (1993).

J. SIVARDIERE, "Vector algebra and cristallography", Acta Cryst. A52, 955-956 (1996).