

Modulation de fréquence et synthèse F.M.

par Daniel BEAUFILS
Institut National de Recherche Pédagogique
Département Technologies Nouvelles
91, rue Gabriel Péri - 92120 Montrouge
e-mail : beaufils@inrp.fr

RÉSUMÉ

Dans un précédent article nous avons présenté une introduction possible du principe des modulations d'amplitude et de fréquence fondée sur leurs utilisations dans le domaine sonore et musical. Nous proposons ici quelques compléments spécifiques des signaux obtenus par modulation de fréquence : la génération et l'étude spectrale des signaux sont effectuées en référence au principe de la «synthèse F.M.» qui est utilisée en synthèse sonore (sons harmoniques et inharmoniques) et est à la base des synthétiseurs.

Dans un précédent article [1] nous avons présenté une introduction possible du principe des modulations d'amplitude et de fréquence fondée sur leurs utilisations dans le domaine sonore et musical. Nous proposons ici quelques compléments concernant le cas particulier de la synthèse par modulation de fréquence. Cette «synthèse F.M.», ainsi nommée en création musicale, a été inventée en 1967 dans le département de Musique de Standford par John CHOWNING. Les éléments que nous donnons ci-dessous, s'appuient sur quelques ouvrages dont en particulier celui que J. CHOWNING lui-même a écrit avec D. BRISTOW¹ [2] dans le cadre de leur contribution à la conception des synthétiseurs Yamaha[©].

-
1. L'ouvrage de J. CHOWNING et D. BRISTOW est intéressant dans la mesure où il s'adresse à des non-spécialistes et contient toutes les explications, depuis la définition de la notion de fréquence jusqu'aux tableaux des fonctions de Bessel ; de nombreux exercices d'application sont proposés, mais il faut connaître le DX7 (ou équivalent) pour suivre les consignes ; par ailleurs, il est malheureusement épuisé et ne semble pas avoir fait l'objet d'une référence d'édition particulière.

LA MODULATION DE FRÉQUENCE

Le principe théorique est la modulation de la fréquence d'un signal (dit «onde porteuse» dans le cas des télécommunications) par un signal de plus basse fréquence (signal modulant). La relation mathématique représentant l'onde modulée s'écrit généralement :

$$s = s_0 \cdot \sin(2\pi f_p t + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t)) \quad (1)$$

Cette expression, où β est appelé indice de modulation, se comprend en calculant la fréquence «instantanée» comme la dérivée temporelle de la phase ; on obtient bien en effet la relation donnant la modulation de la fréquence de base par la fonction de fréquence $f_m^{(2)}$

$$f = f_p + f_m \cdot \beta \cdot \cos(2\pi f_m t) \quad (2)$$

Une telle relation peut être utilisée pour générer, non seulement la fonction mathématique et son graphe, mais également un signal acoustique si les fréquences de la porteuse et de la modulante sont du domaine audible.

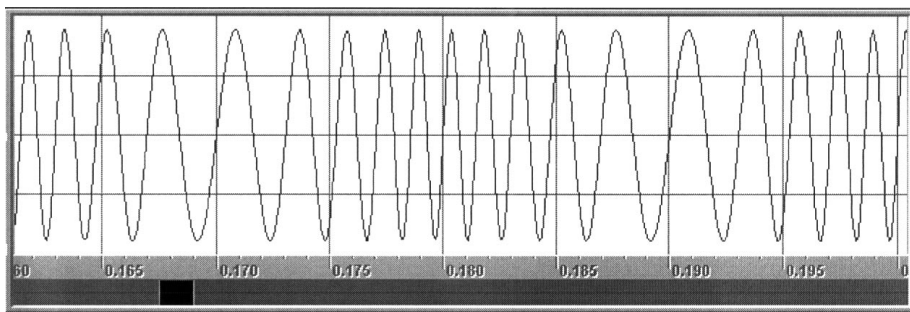


Figure 1 : Exemple d'un signal modulé en fréquence (indice égal à 4) :

$\sin(2\pi \cdot f \cdot t + 4 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t / 10))$ ce signal est obtenu à partir de l'expression mathématique (éditeur syntaxique du logiciel GoldWaves[®]) et peut être écouté si l'on dispose d'un ordinateur muni d'une «carte son» munie d'enceintes acoustiques.

2. Cette relation permet de relier l'indice de modulation à l'excursion temporelle en fréquence : $\beta = \Delta f / f_m$.

LE SPECTRE D'UN SIGNAL MODULÉ EN FRÉQUENCE

Le calcul du spectre de Fourier d'un signal défini par la relation (1) présente quelques difficultés mathématiques ; celui-ci conduit en effet à des fonctions intégrales : les fonctions de Bessel³ (notées $J_k(x)$). De façon plus précise, le spectre est donné par le développement :

$$\begin{aligned} & \sin(2\pi f_p t + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t)) = \\ & J_0(\beta) \cdot \sin(2\pi f_p t) + \\ & J_1(\beta) \cdot \sin(2\pi f_p t + 2\pi f_m t) - J_1(\beta) \cdot \sin(2\pi f_p t - 2\pi f_m t) + \\ & J_2(\beta) \cdot \sin(2\pi f_p t + 4\pi f_m t) - J_2(\beta) \cdot \sin(2\pi f_p t - 4\pi f_m t) + \\ & J_3(\beta) \cdot \sin(2\pi f_p t + 6\pi f_m t) - J_3(\beta) \cdot \sin(2\pi f_p t - 6\pi f_m t) + \dots \end{aligned}$$

Soit, sous forme d'un tableau de «coefficients d'amplitude» :

Fréquence ($k = 0, 1, \dots$)	«Amplitude»
$f_p + k \cdot f_m$	$J_k(\beta)$
$f_p - k \cdot f_m$	$(-1)^k \cdot J_k(\beta)$

Tableau 1

On obtient donc un spectre centré sur la fréquence de la porteuse et comportant des composantes espacées d'une valeur égale à la fréquence modulante. Mais il convient de faire deux remarques. La première concerne l'étendue du spectre qui, contrairement à la modulation d'amplitude, n'est pas limité : le nombre des fréquences latérales (inférieures et supérieures) est infini. Toutefois, compte tenu du comportement des fonctions de Bessel, on peut définir une largeur «effective» : pour une valeur donnée de l'indice de modulation les amplitudes des composantes sont en effet négligeables au-delà d'une certaine valeur de k . Dans la pratique, on considère les valeurs $|k|$ inférieures ou égale à $\beta + 2$.

La seconde remarque concerne les amplitudes relatives : l'importance de la fréquence centrale (celle de la porteuse) dépend fortement de l'indice de modulation : on voit facilement que pour un indice égal à 2,4, l'amplitude de cette composante est

3. Voir compléments en annexe.

quasiment nulle, et que l'essentiel du spectre est donné par deux ou trois fréquences latérales.

Précisons sur un exemple. Considérons pour cela une fréquence porteuse de 1000 Hz et une fréquence de modulation de 100 Hz. Nous allons calculer le spectre pour trois valeurs de l'indice de modulation : $\beta = 1, 2.4$ et 4. Pour cela, nous allons dresser le tableau 2 des valeurs des amplitudes des principales composantes.

β	k de 0 à + N	$J_k(\beta)$	«Amplitude» (fréq. sup.)	«Amplitude» (fréq. inf.)
1	k de 0 à + 3	$J_0(1)$	0.76	0.76
		$J_1(1)$	0.44	- 0.44
		$J_2(1)$	0.11	0.11
		$J_3(1)$	0.02	- 0.02
2.4	k de 0 à + 4	$J_0(2.4)$	0	0
		$J_1(2.4)$	0.78	- 0.78
		$J_2(2.4)$	0.45	0.45
		$J_3(2.4)$	0.13	- 0.13
		$J_4(2.4)$	0.05	0.05
4	k de 0 à + 6	$J_0(4)$	- 0.39	- 0.39
		$J_1(4)$	- 0.07	0.07
		$J_2(4)$	0.36	0.36
		$J_3(4)$	0.43	- 0.43
		$J_4(4)$	0.28	0.28
		$J_5(4)$	0.13	- 0.13
		$J_6(4)$	0.05	0.05

Tableau 2

Dans ce tableau, nous avons donné des amplitudes avec le signe attribué par le calcul. Ce signe correspond à un déphasage de π dont nous ne tenons pas compte pour obtenir les représentations spectrales simples correspondantes.

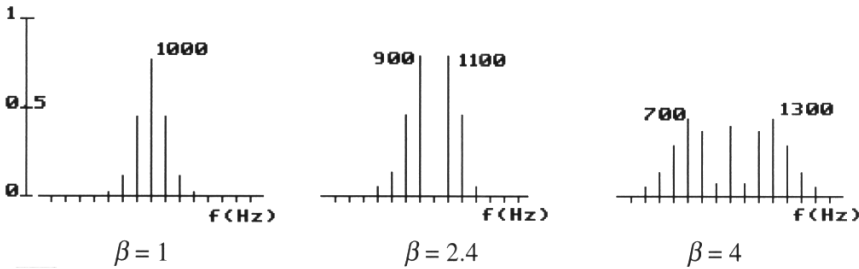


Figure 2

Ci-dessous (figure 3), nous donnons le résultat de l'analyse spectrale par F.F.T. d'un son créé à partir de l'expression mathématique (indice de modulation égal à 4 ; voir figure 1).

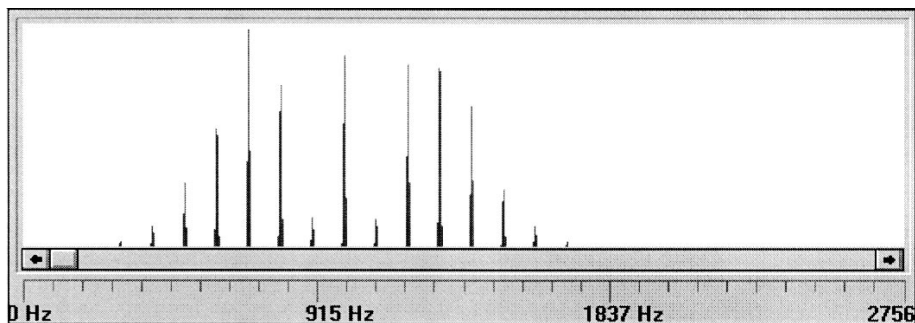


Figure 3 : Calcul de la F.F.T. et représentation graphique (logiciel Virtual Waves[®]).

LA BASE DE LA SYNTHÈSE DE SONS MUSICAUX

La structure des spectres des signaux obtenus par modulation de fréquence montre immédiatement l'intérêt pour la synthèse de sons riches : contrairement à la synthèse additive, un nombre élevé d'harmoniques peut être facilement obtenu avec un seul générateur. Pour obtenir un tel son il suffit de choisir une fréquence de porteuse qui soit un multiple de la fréquence de modulation ; le spectre est alors semblable à celui d'un son d'instrument : fondamentale (éventuellement absente [3]) et harmoniques (fréquences multiples de l'intervalle).

Mais bien évidemment, le cas général où aucune relation particulière n'existe entre la porteuse et la modulante peut être exploité pour la création de sons inharmoniques⁴. Les sonorités ainsi obtenues sont très riches, nouvelles, parfois inouïes et ont été une partie du succès de la synthèse F.M. Bien évidemment, l'un des exemples de synthèse aujourd'hui banal est celui des sons de cloche. Ceux-ci peuvent en effet être très éloignés d'un son harmonique, et la synthèse F.M. permet de les générer très facilement ; il convient seulement, pour donner la «vie» au son de jouer sur la variation de l'amplitude au cours du temps : amplitude de la porteuse qui tend vers zéro, mais

4. On retrouve alors le fait que le signal résultant n'est périodique (donc décomposable en série de Fourier) que si les fréquences sont commensurables.

aussi amplitude de la modulante qui peut évoluer et donc entraîner une variation de timbre⁵.

L'étendue des possibles est encore plus grande, puisque rien n'interdit d'utiliser de très forts indices de modulation, de même que des fréquences de modulation plus élevées que celle de base. Bien évidemment, nous quittons ici le domaine intéressant la communication⁶ puisque le résultat repose en particulier sur les effets de combinaison de composantes avec des fréquences «négatives». Pour calculer le spectre il faut en général bien tenir compte des signes des coefficients d'amplitudes.

Prenons un nouvel exemple : celui d'une modulation avec un indice égal à 1.5, mais avec une fréquence de base de 100 Hz et une modulation à 400 Hz. Les coefficients sont donnés par les valeurs des fonctions de Bessel $J_k(1.5)$, avec $k = 0, 1, 2, 3$.

f = fp + fm (Hz)	Jk(b)	Coefficient d'amplitude	f = fp - fm (Hz)	Jk(b)	Coefficient d'amplitude
100	$J_0(1.5)$	= 0.51			
500	$J_1(1.5)$	= 0.56	- 1100	$J_{-1}(1.5)$	= - 0.56
900	$J_2(1.5)$	= 0.24	- 700	$J_{-2}(1.5)$	= 0.24
1300	$J_3(1.5)$	= 0.05	- 300	$J_{-3}(1.5)$	= - 0.056

Tableau 3

Dans ce tableau 3, nous avons fait apparaître non seulement l'amplitude avec un signe, comme précédemment, mais également les composantes correspondant à des «fréquences négatives».

5. Contrairement à ce qui est sous-entendu (quand ce n'est pas écrit !) dans de nombreux manuels scolaires, l'évolution temporelle du spectre est essentielle à la perception du timbre ; elle est même inhérente à celle de «son musical» ! On notera à ce propos la remarque sur la nécessité de prendre en compte le régime transitoire des oscillateurs pour une étude sérieuse de l'acoustique (voir document d'accompagnement des programmes de Terminale S, version de janvier 1995, pages 72-73).

6. Il convient donc d'éviter ici le terme de «porteuse».

Pour obtenir le spectre d'amplitude (qui donnera le spectre en énergie), il faut alors tenir compte de ces signes qui correspondent à des déphasages de π .

De sorte, que pour "ramener" les composantes de fréquence négative dans la partie "réelle" du spectre, il faut effectuer le changement de signe correspondant, additionner algébriquement les composantes qui peuvent se recouvrir (ce n'est pas le cas ici) avant de faire la représentation en valeurs absolues.

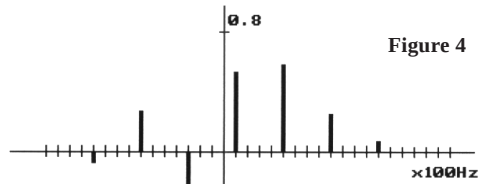


Figure 4

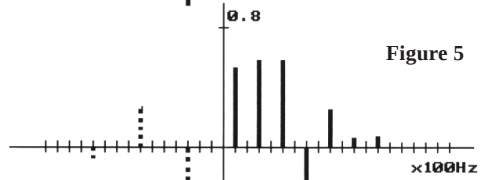


Figure 5

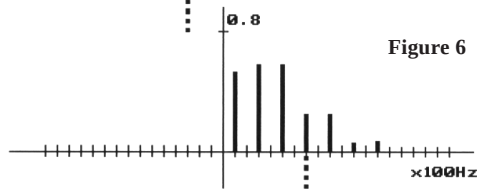


Figure 6

Ci-dessous, le spectre obtenu (figure 7) par calcul numérique après la synthèse d'un tel signal (Logiciel Virtual Waves[®]).

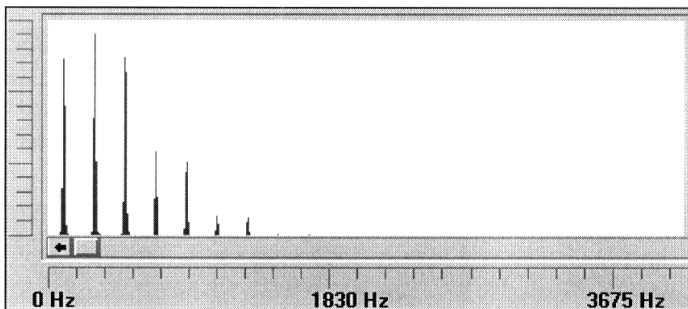


Figure 7

On voit donc ici un exemple d'obtention d'un son harmonique ne comportant que des harmoniques impaires. Mais on comprend alors également qu'un «désaccord» (en utilisant une fréquence de base différente) entraînera la disparition du caractère

harmonique et donc un changement du timbre, et pourra dans certains cas faire apparaître des battements. Les spectres ci-dessous (figures 8 à 10) ont ceux de tels signaux.

Même modulation mais avec une fréquence «porteuse» de 150 Hz.

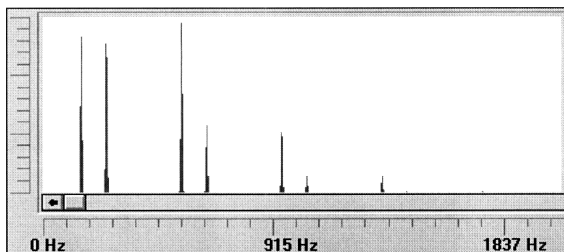


Figure 8

Même modulation mais avec une fréquence «porteuse» de 190 Hz.

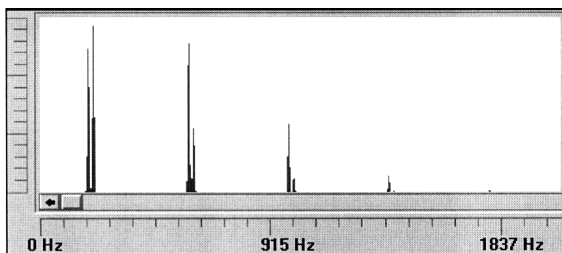


Figure 9

Forme d'onde du dernier signal synthétisé : on y voit à la fois la variation de la fréquence et l'effet sur l'amplitude (perçu comme des battements).

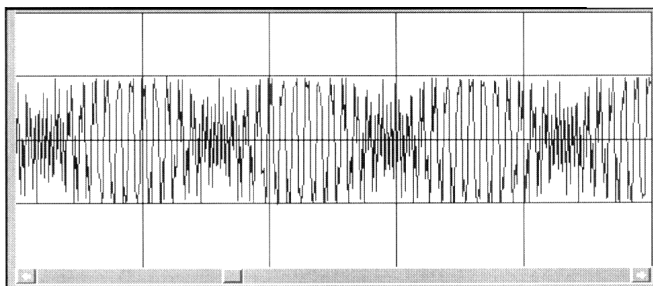
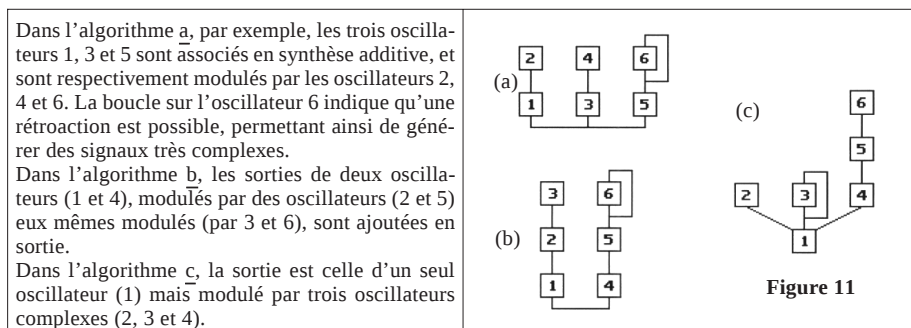


Figure 10

LA MODULATION PAR UN SIGNAL COMPLEXE : LA «SYNTHÈSE F.M.»

Dans les paragraphes précédents nous n'avons présenté que le cas particulier d'une modulation par un signal simple : un signal harmonique ne comportant donc qu'une seule fréquence. Bien souvent les explications s'arrêtent là, alors que bien évidemment, la modulation n'a d'intérêt que pour des signaux modulant complexes ! Nous avons détaillé l'exemple de la transmission d'une parole dans le cas de la modulation d'amplitude⁷, et nous voulons ici présenter le cas de la modulation de fréquence pour la synthèse de sons musicaux.

Nous faisons ici référence aux «algorithmes»⁸ implantés dans les synthétiseurs type DX7[®] (Yamaha). Un module (ou algorithme) de synthèse F.M. est une association particulière de six oscillateurs, dont un au moins est modulé en fréquence. L'objectif n'est évidemment pas d'en faire une présentation détaillée (il y a trente-deux algorithmes classiques) mais de donner quelques indications sur leur nature et sur les utilisations simples. Les exemples ci-dessous sont les algorithmes numérotés 3, 5 et 18 chez Yamaha :



Pour chacun des six oscillateurs, il est bien évidemment possible de choisir la fréquence, l'amplitude, l'indice de modulation ou de rétroaction, ainsi que la durée totale et l'enveloppe temporelle. Comme exemple simple, il peut être intéressant de montrer l'évolution spectrale liée à la simple variation (ici diminution) de l'amplitude du signal modulant.

7. Article précédemment cité.

8. Le terme est ici mis entre guillemets puisqu'il s'agit de la terminologie Yamaha ; il fait référence aux méthodes implantées dans ce synthétiseur numérique.

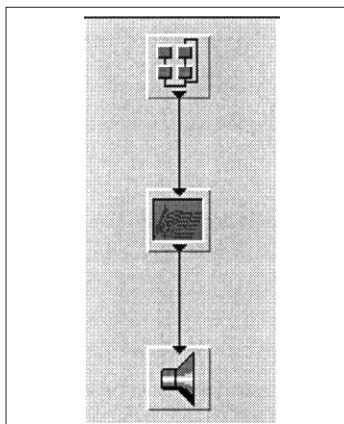


Figure 12 : Module de synthèse, analyseur, et sortie. Pour cet exemple on n'utilisera qu'une partie «d'algorithme» pour moduler un oscillateur (n° 1) par un second oscillateur (n° 2) (Logiciel Virtual Waves[®]).

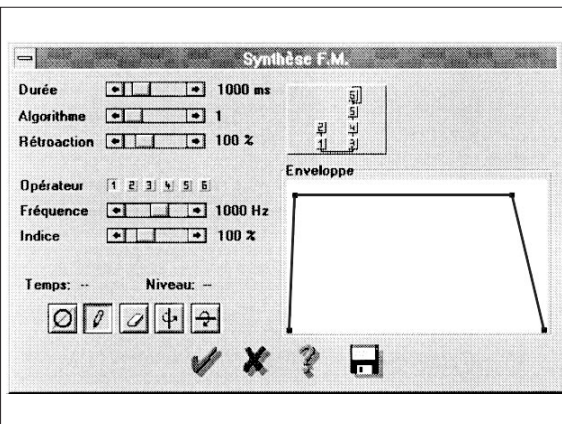


Figure 13 : Signal de référence : oscillateur n° 1 : 1000 Hz, le signal monte très rapidement, est maintenu durant près d'une seconde puis s'éteint rapidement.

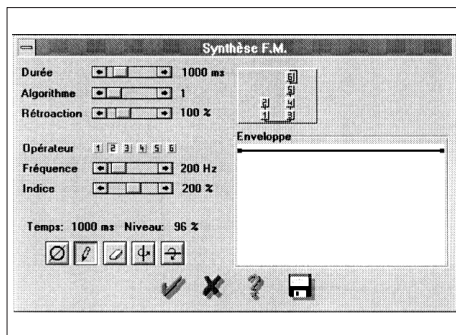


Figure 14 : Signal modulant : oscillateur n° 2 (400 Hz) d'amplitude constante.

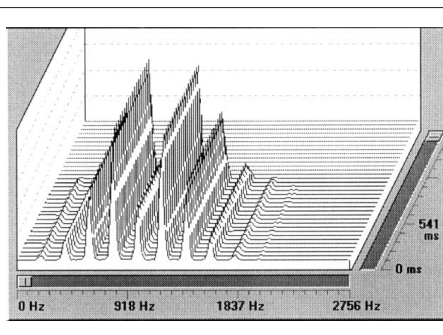


Figure 15 : Spectre tridimensionnel (Logiciel Virtual Waves[®]).

Dans le spectre du signal obtenu, on voit bien l'effet de la modulation de fréquence : plusieurs fréquences latérales, faible amplitude relative de la fréquence «porteuse». Dans l'exemple qui suit, seule l'amplitude du signal de modulation a été modifiée par rapport au cas précédent : elle diminue au cours du temps. Dès lors, l'effet est nettement visible sur le spectre correspondant : à l'extinction des fréquences latérales, correspond une augmentation progressive du signal «porteur». En terme

«sonore», on voit donc apparaître une enveloppe croissant progressivement pour la fréquence centrale et on entend un son initialement riche et dont le timbre évolue vers un son dit «pur».

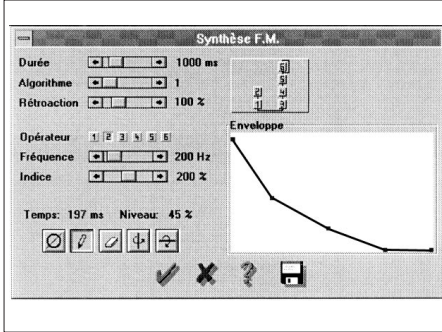


Figure 16 : Signal modulant : forte amplitude initiale et diminution rapide.

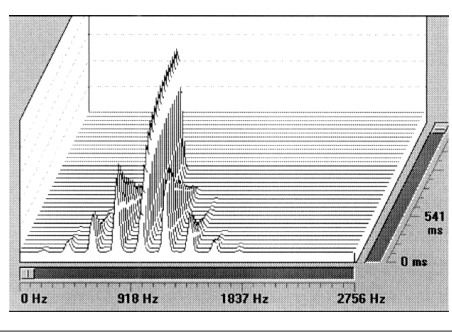


Figure 17 : L'augmentation progressive de l'amplitude de la «porteuse» n'est pas dans le signal n° 1 : elle est due à la variation de la modulation de fréquence.

On comprend alors que, devant l'étendue des possibles ouverte par le jeu des paramètres, s'arrête ici le domaine des explications physico-mathématiques et commence le rôle de la pratique, de l'intuition et de l'inspiration propre à la création musicale.

Spectre d'un son complexe synthétisé en un seul calcul de «synthèse F.M.» : type son de cloche (logiciel Virtual Waves[®]).

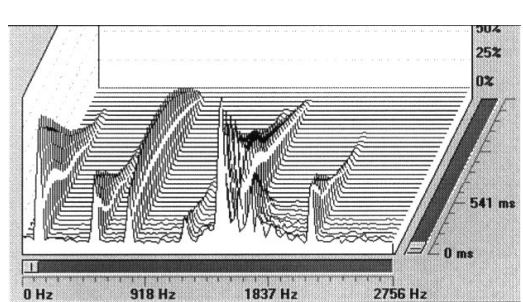


Figure 18

Notons enfin que, tous les logiciels dits «audionumériques» permettent la sauvegarde des résultats sous forme de fichiers de type «Wave» (.WAV pour compatible PC) avec la fréquence d'échantillonnage de son choix (généralement 22 050 Hz ou

44 100 Hz). Ils peuvent alors être reproduits par tout logiciel gérant la sortie audio d'une carte sonore.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BEAUFILS : «*Modulation d'amplitude et modulation de fréquence : les avantages du domaine sonore*», B.U.P. n° 793, avril 1997, p. 741-749.
- [2] J. CHOWNING et D. BRISTOW : «*F.M. ; théorie et applications (par des musiciens et pour des musiciens)*», Yamaha (1985 ?).
- [3] J.-P. LE CARDONNEL : «*A propos des sons périodiques sans fondamental*», B.U.P. n° 767, juillet-août-septembre 1994, pp. 1397-1402.
- [4] F. BROWN : «*La musique par ordinateur*», collection Que-Sais-Je ?, n° 2011, PUF, 1982.
- [5] C. CANCE : «*Analyse spectrale par transformée de Fourier*», in actes de l'Université d'été Outils informatiques d'investigation scientifique pour l'enseignement des sciences physiques, Paris : UdP-INRP, 1995, pp. 117-127.
- [6] J. CHOWNING : «*The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation*», in Fondation of computer music, C. Roads et J. Strawn Eds., Cambridge, Massachussets : MIT Press, 1985.
- [7] J. ESQUIEU : «*Analyse spectrale numérique*», B.U.P. n° 754, avril 1993, pp. 775-797.
- [8] N. FOURNEL : «*Le son par l'image*», Ordinateur et Musique, n° 19, 1996, pp. 10-13.
- [9] R. KERAVEC et R. MOREAU : «*Moduler en fréquence, wobuler : morceaux choisis*», B.U.P. n° 772, mars 1995, pp. 441-458.
- [10] H. REINHARD : «*Équations différentielles*», Dunod Université, 1989, p. 452.
- [11] S. SAUNDERS : «*Improved F.M. audio synthesis methods for real-time digital music generation*», in Fondation of computer music, C. Roads et J. Strawn Eds., Cambridge, Massachussets : MIT Press, 1985.
- [12] R. TOURNIER : «*Modulations*», B.U.P. n° 766, juin 1994, pp. 1151-1164.
- [13] B. VELAY : «*Simulation de modulations de fréquence avec le logiciel SPICE*», B.U.P. n° 772, mars 1995, pp. 459-470.

LOGICIELS CITÉS

GOLDWAVES : logiciel en shareware, livré en démonstration sur certaines disquettes et accessible par téléchargement à <http://web.cs.mun.ca/~chris3/goldwave/>.

VIRTUAL WAVES : logiciel français (auteur Nicolas Fournel), commercialisé par Synoptic (Montreuil). Une présentation détaillée de la première version a été faite dans les numéros de la revue Ordinateur et Musique (1996). Version de démonstration téléchargeable à : <http://www.synoptic.net>

REGRESSI : logiciel distribué par Micrélec. Il permet notamment d'obtenir facilement le tracé de fonctions définies par une intégrale (et non par une primitive).

NOTE

Les illustrations utilisées sont des copies d'écrans partielles des fenêtres des logiciels : celles-ci contiennent généralement de nombreux paramètres de configuration qui auraient surchargé la présentation sans apporter d'information utile à notre propos.

Annexe

Quelques compléments sur les fonctions de Bessel

DÉFINITION DES FONCTIONS DE BESSEL

Les fonctions de Bessel se rencontrent peu souvent, hormis le cas bien connu de la fonction J_1 qui intervient dans le calcul de la figure de diffraction par une pupille circulaire. Dans les ouvrages de mathématiques (voir [10] par exemple), ces fonctions sont introduites comme les solutions de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Celles qui nous intéressent ici sont en fait les fonctions dites de Bessel de première espèce, et seulement celles pour lesquelles ν est un entier (n). Ces fonctions sont notées J_n . Dans ce cas, l'une des propriétés est celle implicitement utilisée dans l'article :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

L'expression intégrale des fonctions J_n peut s'écrire de différentes façons :

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(t) - n \cdot t) \cdot dt$$

ou :

$$J_{2n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(t)) \cdot \cos(2n \cdot t) \cdot dt$$

$$J_{2n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \cdot \sin(t)) \cdot \sin((2n+1) \cdot t) \cdot dt$$

Ces expressions permettent de voir le lien avec la décomposition de la fonction modulée en fréquence donnée dans l'article.

GRAPHES DE QUELQUES FONCTIONS DE BESSEL

Ci-après nous donnons, afin de permettre une approche semi-quantitative, le graphe des fonctions de Bessel J_0 , J_1 , J_2 et J_3 . Ces graphes ont été obtenus par calcul d'intégrale suivant l'une des formules ci-dessus avec le logiciel Regressi[®] : la variable

x ayant été créée avec ses valeurs successives (commande Remplir), une variable telle que J_1 peut être définie comme fonction par :

$$(1/\pi) * \text{INTG}(0, \pi, t, \cos(x * \sin(t) - t))$$

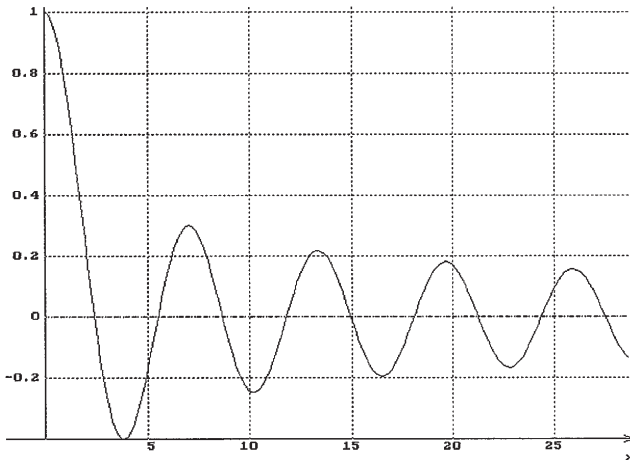


Figure 19 : Graphe de la fonction J_0 .

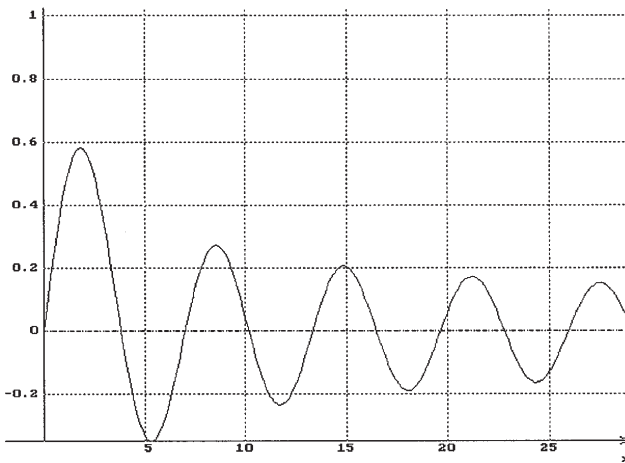


Figure 20 : Graphe de la fonction J_1 .

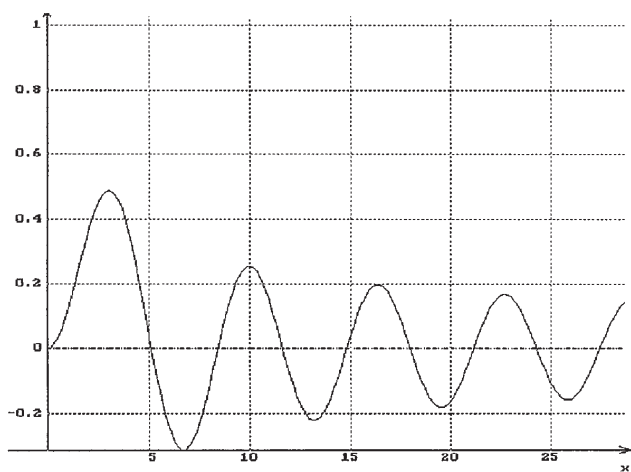


Figure 21 : Graphe de la fonction J_2 .

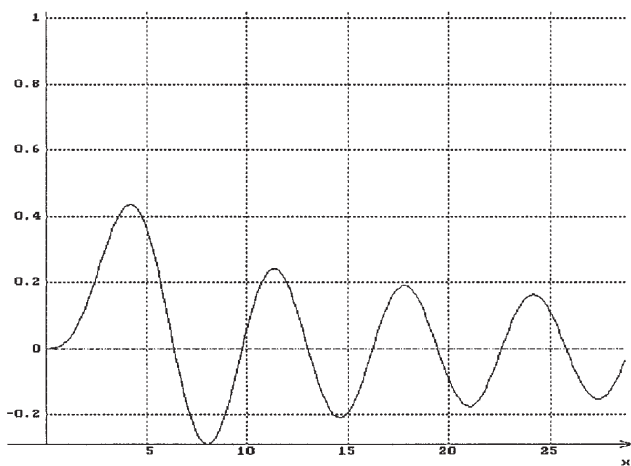


Figure 22 : Graphe de la fonction J_3

Ces fonctions sont visualisables à l'aide de logiciels tels que VirtualWaves cité dans le texte. Ci-dessous, le spectre en trois dimensions d'un signal dont on fait varier le taux de modulation de 0 à 400 % de façon linéaire dans le temps. Cela revient à faire varier à la manière d'une modulation, l'indice de modulation de 0 (à l'instant

initial) à 4 (date finale choisie égale à 400 ms). Les courbes d'enveloppe temporelle qui apparaissent pour la fréquence centrale et les bandes latérales ne sont autre que les fonctions de Bessel ci-dessus (du moins leur valeur absolue, puisqu'il s'agit uniquement des amplitudes) : on voit en particulier l'annulation de la fréquence centrale pour $t = 240$ ms environ.

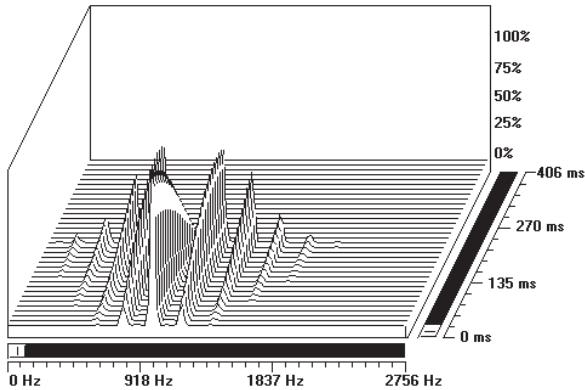


Figure 23 : Calcul et représentation de 0 à 240 %.

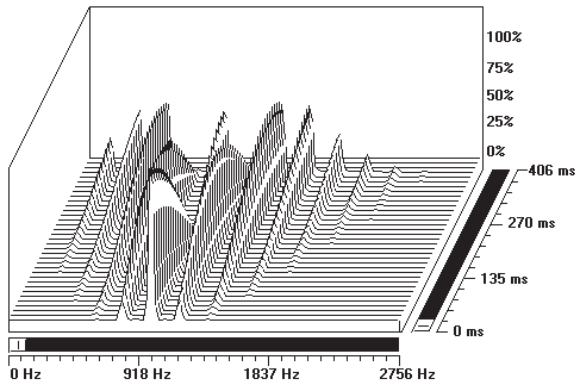


Figure 24 : Calcul et représentation complète de 0 à 400 %.