

---

# Bulletin de l'Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

---

## Histoire de la symétrie

par Jean SIVARDIÈRE  
CEA / Département de Recherche Fondamentale  
sur la Matière Condensée / SPSMS / MRS  
38054 Grenoble Cedex 9

---

### I - Des origines à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle\*

#### RÉSUMÉ

*La symétrie est un concept fondamental de la science, qui a envahi peu à peu les mathématiques, la physique, la chimie et même la biologie. Nous décrivons, dans cette première partie et la suivante, les principales étapes de son développement : son observation dans la nature puis son introduction dans les créations humaines ; sa description scientifique (naissance de la cristallographie, invention de la théorie des*

---

\* La seconde partie de cet article paraîtra dans le B.U.P. n° 797, octobre 1997.  
Rappelons également que Jean SIVARDIÈRE a publié en 1995 un ouvrage intitulé «*La symétrie en mathématiques, physique et chimie*» (Presses Universitaires de Grenoble) dont nous avons fait l'analyse dans le B.U.P. n° 789, décembre 1996, p. 2002-2003.

groupes) ; son exploitation pour l'étude des systèmes symétriques (principe de symétrie de Curie) ; enfin ses aspects «modernes» (découverte de nouvelles symétries et des brisures de symétrie, théorèmes de Noether et de Wigner, symétrie des lois et des interactions). La bibliographie est donnée à la fin de cet article.

## 1. ÉMERGENCE DE LA NOTION DE SYMÉTRIE

### 1.1. Observation de la symétrie

Parmi les formes généralement complexes et irrégulières observables à l'œil nu, la nature offre des exemples d'objets ordonnés, possédant des propriétés de symétrie géométrique : ces «arrangements réguliers» ont toujours, semble-t-il, frappé et séduit l'esprit humain. Deux types de symétries se rencontrent dans la nature :

– Les symétries de rotation sont les plus aisément perceptibles : symétrie bilatérale des êtres vivants supérieurs, ou symétrie du miroir (le miroir est défini par le champ de pesanteur et la direction du mouvement vers l'avant) ; symétrie de rotation d'ordre  $n$  ( $n = 3$  ou parfois  $4$  pour la feuille de trèfle,  $n = 5$  pour l'étoile de mer et la fleur de lys,  $n = 6$  pour le «cristal» de neige). Les cristaux polyédriques présentent également des symétries discrètes d'ordre  $n = 2, 3, 4$  et  $6$ . Une poire ou un œuf possèdent une symétrie continue de révolution ; une pomme, une goutte d'eau ou un grain de pollen sont approximativement sphériques.

– Les symétries de translation réticulaires sont plus rares. A une dimension, on peut citer les nervures de certaines feuilles ou le mille-pattes ; à deux dimensions, le réseau hexagonal du nid d'abeilles (la forme rhomboïdale du fond des cellules d'un rayon de cire sera interprétée au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, par Réaumur, Koenig et MacLaurin : à capacité donnée, elle minimise le volume des parois).

### 1.2. Reproduction de la symétrie

Les objets artisanaux sont souvent symétriques : outils usuels, poteries, roues, véhicules. Le biface triangulaire, inventé par les australopithèques il y a plus d'un million d'années, est le premier objet symétrique créé par l'homme. On a retrouvé des bijoux et des poteries préhistoriques portant des décorations symétriques. Alors que le violon classique est très dissymétrique, Savart (1791-1841), s'appuyant sur les expériences de Chladni (1756-1827), construisit son fameux violon trapézoïdal en recherchant un maximum de symétrie (1818). Certaines œuvres musicales, en particulier de Bach (l'Art de la Fugue, l'Offrande Musicale), Mozart (le canon palindromique), Chopin (les Études) et Bartok, possèdent d'étonnantes symétries.

Mais la symétrie, longtemps assimilée aux notions d'harmonie et d'équilibre selon les préceptes de la philosophie pythagoricienne et de l'art classique, est surtout présente

dans les œuvres architecturales de nombreuses civilisations : pyramides égyptiennes et aztèques, temples grecs, cathédrales, jardins à la française, Tadj Mahal, ... Les colonnades et les frises des Sumériens et des Aztèques sont invariantes par translation réticulaire.

### 1.3. Invention de symétries

Les symétries de rotation d'ordre supérieur à 6 sont très difficilement observées dans la nature, mais l'homme les a inventées. Ainsi l'église romane de Rieux-Minervois (Aude) possède un clocher heptagonal, les rosaces des cathédrales gothiques sont invariantes par rotation d'ordre  $n = 12$  ou  $16$ , la ville de Neuf-Brisach (Haut-Rhin) fut construite par Vauban selon un plan octogonal. Mille ans avant Jésus-Christ, les Etrusques jouaient avec des dés dodécaédriques réguliers.

Alors que la nature n'offre qu'un exemple de pavage symétrique du plan, le réseau en nid d'abeilles, les dix-sept symétries possibles des milieux périodiques à deux dimensions ont été repérées dans les dallages des temples égyptiens, les décorations de l'Alhambra de Grenade et les tissages grecs (ces symétries seront ultérieurement énumérées par Fedorov en 1890). Plus récemment, les étonnants dessins symétriques de l'artiste néerlandais Escher (1898-1971) ont anticipé sur l'étude de la symétrie à plusieurs couleurs et inspiré des travaux de cristallographie mathématique.

## 2. OBJETS MATHÉMATIQUES SYMÉTRIQUES

### 2.1. Les polyèdres symétriques

Ce sont surtout les mathématiciens grecs qui ont imaginé des objets symétriques idéalisant des formes naturelles. Le cylindre, le cône, le tore, la sphère sont invariants dans des symétries continues de rotation. Les cinq solides réguliers dits de Platon (427-347) - tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre - idéalisent des formes observables dans la nature : ce sont les polyèdres dont les symétries multiaxiales sont les plus élevées possibles. Ils étaient connus des Grecs dès le début du IV<sup>e</sup> siècle (Théétète d'Athènes), et Euclide (365-300 ?) a montré dans le treizième livre de ses «Éléments» que ce sont les seuls polyèdres réguliers convexes (il existe au contraire une infinité de polygones réguliers).

Les quatre polyèdres réguliers non convexes n'ont été découverts que bien plus tard : les deux dodécaèdres étoilés par Képler (1571-1630) d'où leur nom d'oursins de Képler ; le grand dodécaèdre et le grand icosaèdre par Poinsoot (1809). Cauchy (1811) a montré qu'il n'en existe pas d'autres.

Archimède (287-212) énuméra treize polyèdres semi-réguliers, qui ont été décrits ultérieurement à Alexandrie par Héron et Pappus. Chacun de ces polyèdres a toutes ses arêtes égales ; ses faces sont régulières mais ne sont pas toutes égales. L'un d'eux est l'icosaèdre régulier tronqué : c'est la structure d'un ballon de football ou d'un dôme géodésique de Fuller. Un quatorzième polyèdre archimédien a été découvert il y a vingt ans par le mathématicien américain Miller.

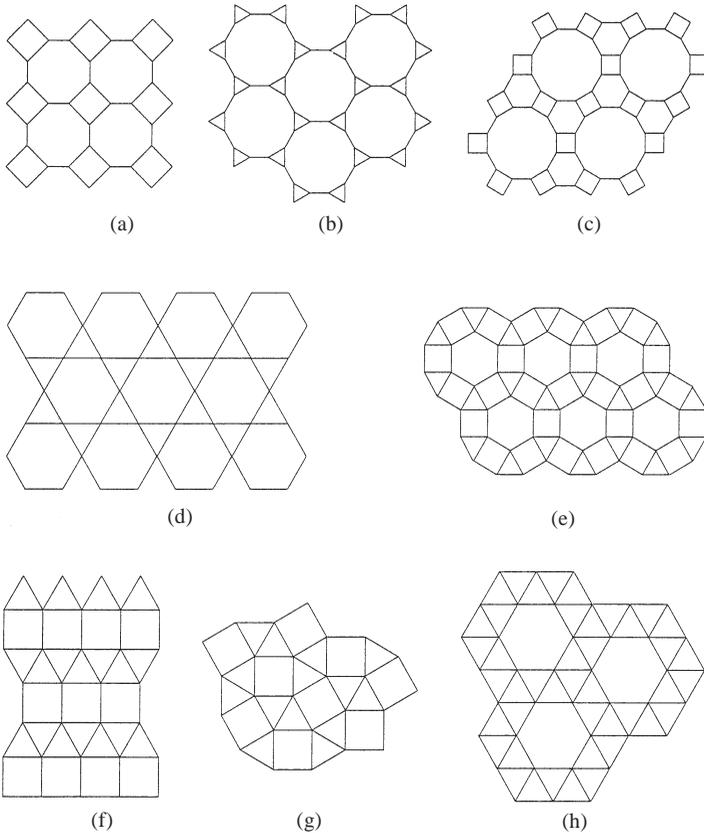
On passe d'un polyèdre à son dual, par exemple du cube à l'octaèdre, en remplaçant chaque face par son centre : les polyèdres duaux des polyèdres archimédiens ont été décrits par le mathématicien belge Catalan (1814-1894).

## 2.2. Les pavages symétriques

Képler était fasciné par les polyèdres : il étudia les prismes et antiprismes, qui sont des polyèdres semi-réguliers. Il s'intéressa également aux pavages réguliers du plan, analogues des polyèdres réguliers auxquels on peut associer des pavages de la sphère par des polygones sphériques réguliers (1619) : il montra qu'il n'en existe que trois - les pavages triangulaire, carré et hexagonal. Il décrit de même les huit pavages semi-réguliers du plan, analogues des polyèdres d'Archimède (figure 1) : les pavages duaux seront décrits tardivement par le cristallographe allemand Laves. Signalons que le pavage de l'espace par des polyèdres réguliers avait été étudié dès l'antiquité : Aristote pensait que le pavage était possible non seulement avec des cubes mais aussi avec des tétraèdres, ce qui est faux.

## 2.3. La relation d'Euler

Soit un polyèdre ayant  $S$  sommets,  $F$  faces et  $A$  arêtes. Euler (1707-1783) a montré en 1750 que  $S + F = A + 2$ , sa démonstration fut perfectionnée par Legendre en 1794 puis Cauchy en 1813. Cette relation découle presque immédiatement d'un résultat obtenu par Descartes en 1639, elle est souvent attribuée à tort à ce dernier. Elle n'est valable que pour les polyèdres homéomorphes, c'est-à-dire topologiquement équivalents, à la sphère. Bien qu'elle caractérise la topologie, et non la métrique, des polyèdres, elle est très utile dans la théorie cristallographique. Elle s'étend en effet aux pavages d'une surface sous la forme  $S + F = A + \alpha$ , où  $S$ ,  $F$  et  $A$  sont respectivement les nombres de nœuds, de cellules et de côtés du pavage.  $\alpha$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface, elle vaut 1 pour le plan, 2 pour la sphère, 0 pour le tore. La relation d'Euler permet en particulier de démontrer qu'un pavage parfait de la sphère par des hexagones est impossible : il faut introduire douze défauts pentagonaux, comme dans l'icosaèdre tronqué.



**Figure 1 :** Les huit pavages semi-réguliers du plan, énumérés par Képler : ce sont les analogues des quatorze polyèdres semi-réguliers d'Archimède, auxquels correspondent les quatorze pavages semi-réguliers de la sphère. Le pavage (d) est appelé kagomé.

La théorie des polyèdres et pavages symétriques a joué un rôle fondamental en cristallographie géométrique. Les mathématiciens se sont également intéressés aux polytopes de l'espace à quatre dimensions : alors qu'un polyèdre est formé de faces situées dans des plans différents et accolées suivant leurs arêtes, un polytope est formé de polyèdres situés dans des hyperplans différents et accolés suivant leurs faces. Les six polytopes réguliers, analogues des polyèdres réguliers d'Euclide, ont été énumérés par le mathématicien suisse Schläfli (1855) : ils sont aujourd'hui utilisés dans la description des solides amorphes (Kléman et Sadoc, 1979).

### 3. LA SYMÉTRIE DE LA MATIÈRE

En 1530, le médecin et métallurgiste allemand Agricola (1494-1555) proposa une classification des cristaux qui ne faisait pas intervenir leur symétrie. Mais très vite, et jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, l'histoire de la symétrie s'est pratiquement confondue avec celles de la minéralogie puis de la cristallographie.

#### 3.1. L'univers symétrique des Grecs

Dans la conception pythagoricienne, le monde est simple et harmonieux, donc symétrique. Selon Parménide (504-450), la Terre est une forme parfaite et ne peut donc être que sphérique : cette hypothèse s'imposa bien avant que des preuves expérimentales de cette sphéricité soient avancées par Aristote (384-322).

L'idée pythagoricienne suivant laquelle le monde est symétrique fut appliquée à la matière elle-même. Platon associait ainsi le tétraèdre, le cube, l'octaèdre et l'icosaèdre aux quatre éléments : feu, terre, air et eau respectivement. La transformation d'eau en vapeur sous l'influence du feu correspondait selon lui à une dissociation et à un regroupement de faces triangulaires. La découverte du dodécaèdre posa aux Grecs un problème délicat, résolu par l'invention d'un nouvel élément : l'éther ! Octaèdres et icosaèdres ne pouvant pas l'espace, Aristote réfutait le modèle de Platon associant un élément à chaque polyèdre régulier.

#### 3.2. Un précurseur de la cristallographie : Képler

Képler avait, comme les Grecs, une conception mathématique de l'univers. Il chercha à décrire les orbites des six planètes connues de son temps à l'aide d'une construction faisant intervenir les polyèdres réguliers. Sa «théorie», basée sur les résultats de Copernic, ne fut pas confirmée par ses observations et s'écroula bien avant la découverte d'une septième planète, Uranus, par Herschell en 1781.

En 1611, mieux inspiré, Képler s'intéressa aux cristaux de neige et publia le premier modèle rendant compte d'une propriété de symétrie de la matière : il imagina qu'un cristal de neige était formé de «molécules de neige» sphériques assemblées de manière compacte dans un plan, ce qui justifiait immédiatement sa symétrie hexagonale.

#### 3.3. Les successeurs de Képler

Le modèle de Képler fut repris par Hooke (1635-1703), qui expliqua les formes extérieures des cristaux d'alun et de salpêtre par des empilements compacts tridimensionnels de «particules globulaires» (1665). Huygens envisagea, dans son *Traité de la*

Lumière de 1690, des empilements de particules ellipsoïdales pour rendre compte de la double réfraction et du clivage de la calcite ou spath d'Islande.

L'étude des empilements compacts fut développée vers 1810 par le chimiste anglais Wollaston (1766-1828), qui joua un rôle important dans l'émergence de la théorie atomique, puis à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle par Lord Kelvin en 1894 et par son compatriote Barlow (1845-1934), qui précisa la distinction entre empilements hexagonaux et cubiques et imagina avec Pope la structure interne de divers cristaux (1897) bien avant leur étude par diffraction des rayons X, à partir de 1912.

Selon une conjecture de Képler, ces empilements étaient les plus compacts possibles (taux de compacité  $\pi / \sqrt{12} = 0,91$  à deux dimensions et  $\pi / \sqrt{18} = 0,74$  à trois dimensions) : Gauss (1831) le démontra en ne considérant que des empilements périodiques. Cette question fait partie du dix-huitième problème de la fameuse liste de vingt-trois problèmes non résolus établie par Hilbert en 1900 : il a été résolu à deux dimensions par le hongrois Fejes Toth en 1940 ; une démonstration récente du problème tridimensionnel proposée par l'américain Hsiang est contestée (voir *Pour la Science*, janvier 1995).

### 3.4. Naissance de la cristallographie

Les angles dièdres formés par les faces d'un cristal sont constants pour une espèce chimique donnée, c'est-à-dire indépendants des aires des faces de l'échantillon considéré : cette «loi de la constance des angles dièdres» est la première loi fondamentale de la cristallographie, elle fut énoncée en 1669 par le danois Stensen ou Sténon (1638-1686) sur le quartz et l'hématite, et par l'italien Guglielmini (1655-1710), puis de manière définitive en 1772 par le français Romé de l'Isle (1736-1790) et à la même époque par le suédois Bergman (1735-1784). Le russe Lomonosov (1711-1765) interpréta en 1749, par des arrangements carrés ou triangulaires de corpuscules sphériques «à la Képler», les formes extérieures des cristaux de NaCl et KNO<sub>3</sub>, le parallélisme des faces opposées et la constance des angles entre faces.

En 1784, le français Haüy (1743-1822) découvrit la seconde loi fondamentale de la cristallographie, dite des troncatrices rationnelles simples, des indices rationnels simples, ou encore des caractéristiques entières : l'orientation des faces cristallines peut être décrite par trois nombres entiers petits en prenant comme axes de coordonnées trois arêtes du cristal, ce qui suggère l'existence d'un réseau, hypothèse déjà avancée par Bergman. D'où l'introduction des indices de Weiss (1780-1856) puis de Whewell et Miller (1801-1880) pour noter les faces cristallines.

C'est la loi de Haüy qui fonde réellement la cristallographie et la dégage de la minéralogie. Les lois de Romé de l'Isle et de Haüy ont été comparées respectivement aux lois de Proust (loi des proportions définies) et de Dalton (loi des proportions multiples) qui sont à la base de la chimie moderne.

### 3.5. Le cristal périodique

Haüy observa le morcellement par clivage d'un cristal prismatique de calcite, qui fournissait de manière inattendue un «noyau» rhomboédrique, et il imagina que les «molécules intégrantes» constituant la calcite étaient des rhomboèdres qui, contrairement aux sphères de Képler, remplissaient l'espace. Le modèle, trop sommaire, n'était pas transposable au fluorure de calcium, qui se présente sous forme d'octaèdres, puisqu'on ne peut paver l'espace avec des octaèdres. Mais il sera repris vers 1885 par Fedorov (1853-1919), qui déterminera les six «paralléloèdres» susceptibles de paver l'espace, et développé par les russes Voronoï (1868-1908) et Delone (1890-1980) : ces polyèdres ne sont pas autre chose que les cellules de Dirichlet-Voronoï-Wigner-Seitz des réseaux de Bravais.

De ses travaux, Haüy dégagait cependant l'hypothèse d'une triple périodicité des milieux cristallins (1801), implicite dans les modèles d'empilements compacts de Képler, Hooke, Huygens, Sténon, Lomonosov, Wollaston, ... et déjà émise explicitement par Guglielmini puis en 1773 par Bergman en considérant le clivage de divers cristaux. En 1822, Haüy comprit que la périodicité cristalline était incompatible avec les symétries de rotation d'ordres autres que 2, 3, 4 et 6, seules observées sur les formes extérieures des cristaux - cette «restriction cristallographique» était implicite dans les travaux de Képler sur les pavages du plan par des polygones réguliers. En 1843, le français Delafosse (1796-1878), élève de Haüy, précisa les notions de réseau et de motif, et abandonna le continuum de Haüy au profit de la théorie atomique.

### 3.6. Classes cristallines et réseaux

Des opérations possibles de symétrie d'orientation des cristaux (miroir, inversion, rotations et rotations inverses d'ordre 2, 3, 4 et 6) et de leurs combinaisons décrites par les minéralogistes, Mohs (1773-1839) déduisit en 1820 les sept symétries possibles des réseaux cristallins. Les trente-deux classes cristallines furent énumérées en 1830 par l'allemand Hessel (1796-1872), ses résultats restèrent ignorés et furent redécouverts en 1867 par le finlandais Gadolin (1828-1892). Entre temps, Euler (1707-1783) avait montré que le produit de deux rotations autour d'un même point est une rotation et Rodrigues en 1840, par une méthode géométrique très élégante, puis Hamilton et Cayley en 1845, par la théorie des quaternions, avaient obtenu la formule donnant le produit de deux rotations.

Les propriétés de translation des réseaux de points furent étudiées par l'allemand Frankenheim (1801-1869) qui, en 1845, proposa quinze types de réseaux, puis par Bravais (1811-1863) qui, en 1849, montra qu'il n'en existe que quatorze distincts. Bravais introduisit en 1848 la notion de réseau réciproque, appelé alors polaire, qui sera développée par Mallard (1878) et Gibbs (1880), et retrouvée par Ewald en 1912 pour décrire les phénomènes de diffraction des rayonnements.

#### 4. LA THÉORIE DES GROUPES

##### 4.1. Des équations algébriques aux groupes

Les mathématiciens grecs auraient pu être les inventeurs de la théorie des groupes. On l'a vu, ils connaissaient de nombreuses figures géométriques symétriques. Mais ils n'envisagèrent ni l'ensemble des opérations de symétrie d'une figure donnée ni le produit de deux opérations. Autrement dit, une symétrie était pour eux une propriété d'une figure, non un objet mathématique indépendant de la figure et opérant sur elle. Les premiers cristallographes étudièrent les combinaisons d'opérations de symétrie des cristaux, mais la notion de groupe n'émergea qu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle, de manière inattendue, à partir de considérations algébriques et non géométriques.

La résolution des équations algébriques à coefficients entiers préoccupait depuis longtemps les mathématiciens. La résolution numérique des équations de degré 2 était partiellement connue des Babyloniens, mais il fallut attendre le XII<sup>e</sup> siècle pour que les indiens découvrent la résolution littérale et l'apparition des racines par paires. La résolution des équations de degré 3 fut obtenue au début du XVI<sup>e</sup> siècle indépendamment par les italiens del Ferro et Tartaglia (formule dite de Cardan) puis par Viète ; celle des équations de degré 4 le fut à la même époque par Ferrari.

Au début du XVII<sup>e</sup> siècle, Girard (1595-1632) affirma qu'une équation de degré  $n$  possède exactement  $n$  racines, réelles ou complexes : ce «théorème fondamental de l'algèbre» fut démontré seulement en 1799 par Gauss après des tentatives de Descartes, d'Alembert et Euler. Mais la résolution «par radicaux» des équations de degré supérieur à 4 ne put être obtenue, et on finit par soupçonner qu'elle était impossible.

Vers 1770, une nouvelle approche fut inventée simultanément par Lagrange, Van der Monde et Waring. Viète avait remarqué que les coefficients d'une équation algébrique de degré  $n$  sont des fonctions *totalelement symétriques* des  $n$  racines  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de l'équation, c'est-à-dire invariantes si on permute entre elles les  $n$  racines. Ainsi pour  $n = 3$ , l'équation peut s'écrire :

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

et on a :

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$b = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

$$c = -x_1 x_2 x_3$$

Lagrange fut alors amené à considérer des fonctions polynomiales non totalement symétriques des  $n$  racines. De telles fonctions prennent plusieurs valeurs distinctes quand on permute les  $n$  racines suivant les  $n!$  manières possibles : Lagrange a montré que le nombre  $p$  de ces valeurs est un diviseur de  $n!$ . Par exemple la fonction  $L_4 = x_1 x_2 + x_3 x_4$  ne prend que trois valeurs distinctes quand on permute les quatre racines  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  d'une équation de degré 4, ces valeurs sont donc racines d'une équation d'ordre 3.

Les fonctions non totalement symétriques telles que  $L_4$ , pour lesquelles  $1 < p < n!$  ( $p$  divisant  $n!$ ), sont appelées résolvantes de Lagrange, leur détermination permet d'obtenir les racines de l'équation de départ. En effet une résolvante d'une équation de degré  $n$  est racine d'une équation de degré  $n - 1$  : les coefficients de cette équation peuvent être déterminés par radicaux à partir des coefficients de l'équation de départ en résolvant une troisième équation, de degré  $(n - 2)!$ . Étant donné que  $(n - 2)!$  est inférieur ou égal à  $n$  pour  $n = 2, 3$  et  $4$ , Lagrange interpréta ainsi la possibilité de résoudre par radicaux les équations de degré inférieur ou égal à 4, et retrouva les formules de Cardan et Tartaglia. Mais les difficultés subsistaient pour  $n$  plus grand que 4.

#### 4.2. Le groupe des substitutions

On envisagea alors les  $n!$  opérations, appelées substitutions, faisant passer d'une permutation, ou arrangement de  $n$  objets dans un certain ordre, à une autre. On définit le produit de deux substitutions et on montra que ces substitutions forment un groupe, appelé aujourd'hui groupe des substitutions ou groupe symétrique d'ordre  $n$  et noté  $S_n$ . Vandermonde découvrit la décomposition d'une substitution en substitutions circulaires ; Ruffini étudia le groupe  $S_5$  ; en 1813, Cauchy (1789-1857) explicita plus généralement les propriétés du groupe  $S_n$ .

La théorie des équations algébriques progressa avec Abel et Galois. Ce dernier, en 1830, associa un certain groupe  $G$ , appelé groupe de Galois, à toute équation algébrique de degré  $n$ . Il montra que la résolution de l'équation par radicaux n'est possible que si  $G$  possède un sous-groupe invariant. Pour  $n$  supérieur à 4, un tel sous-groupe n'existe pas en général,  $G$  est dit «simple», c'est le groupe des substitutions de  $n$  objets : on explique ainsi l'impossibilité de résoudre l'équation par radicaux.

#### 4.3. La contribution de Gauss

La notion de groupe fut introduite de manière indépendante par Gauss en 1800 quand il étudia le produit des formes quadratiques. En 1801, Gauss découvrit également les groupes additifs et multiplicatifs des entiers modulo  $n$ . Auparavant, en 1796, il avait utilisé implicitement la théorie des groupes alors qu'il cherchait à résoudre les équations cyclotomiques  $z^n - 1 = 0$ , c'est-à-dire à construire les polygones réguliers à  $n$  côtés avec la règle et le compas. Il avait ainsi montré qu'une solution existe seulement si  $n$  est un nombre de Fermat de la forme  $2^{2^k} + 1$  ( $n = 3, 5, 17, 257, 65537$  pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ) et s'il est premier (pour  $k = 5$ ,  $n$  n'est pas premier, Euler a montré qu'il est divisible par 641). Avant lui, les Grecs avaient seulement construit les polygones réguliers à  $n = 3, 4, 5, 15$  côtés et ceux qui s'en déduisent en doublant le nombre des côtés.

#### 4.4. Développements de la théorie des groupes

L'étude des groupes de substitutions fut poursuivie par Hamilton, Cayley (qui introduisit le premier la notion de groupe abstrait en 1854) et Sylvester. Les travaux de Galois furent publiés en 1846 par Liouville. L'application de la théorie des groupes à la résolution des équations algébriques fut approfondie par Jordan (1838-1922), qui réussit à comprendre l'importance de la théorie de Galois, puis Mathieu et Serret (1866). Vers 1870, Dedekind et Kronecker énoncèrent les axiomes de la structure de groupe. Jusqu'à cette époque, seuls les groupes de permutations étaient étudiés. Puis Sophus Lie (1842-1899) développa la théorie des groupes continus à propos de la résolution des équations différentielles, de même que Galois avait développé celle des groupes finis à propos de la résolution des équations algébriques.

#### 4.5. Théorie des groupes et géométrie

Jordan fut le premier à considérer des groupes de transformations géométriques. Felix Klein (1849-1925), dans son fameux programme d'Erlangen (1872), puis Sophus Lie mirent en évidence le rôle fondamental joué par les groupes en géométrie, une géométrie étant définie comme l'étude des figures invariantes dans un certain groupe de transformations appelé *groupe principal* de cette géométrie.

Ainsi la *géométrie métrique* est l'étude des figures égales, c'est-à-dire des propriétés des figures géométriques invariantes dans le groupe des isométries ou groupe métrique, qui comprend les déplacements et les retournements. La *géométrie euclidienne* est plus générale, en ce sens qu'elle s'intéresse non seulement aux figures égales, mais aussi aux figures semblables : son groupe principal est le groupe des similitudes, qui comprend les isométries et les similitudes. La *géométrie affine* et la *géométrie projective*, plus générales encore, ont pour groupe principal le groupe affine (projections parallèles) et

le groupe des homographies (projections centrales) respectivement. Enfin la *topologie* a pour groupe principal le groupe des isotopies : nœuds et surfaces sont caractérisés par leurs invariants topologiques.

#### 4.6. La théorie des groupes d'espace

Revenons à la symétrie cristalline : les trente-deux groupes ponctuels et les quatorze réseaux de Bravais étant connus, restait à les combiner pour obtenir les symétries spatiales possibles des cristaux. S'appuyant sur l'étude des groupes d'isométries publiée en 1867 par Jordan, l'allemand Sohncke (1842-1897) envisagea des axes hélicoïdaux de rotation et réussit en 1879 à énumérer les soixante-cinq groupes d'espace chiraux, c'est-à-dire ne contenant que des opérations propres, translations et rotations. L'existence d'éléments impropres (miroirs avec ou sans glissement, axes inverses) ne fut prise en considération que plus tardivement, bien que les travaux de Pasteur (voir plus loin) aient précédé ceux de Jordan. L'énumération des cent soixante-cinq groupes achiraux - d'où un total de deux cent trente groupes d'espace - fut effectuée entre 1885 et 1890 par Fedorov, et indépendamment en 1891 par l'allemand Schoenflies (1853-1928), à qui Klein avait suggéré cette étude, et en 1894 par Barlow.

Peu de temps après, en 1895, les rayons X furent découverts par Roentgen, leur caractère ondulatoire démontré par Wiechert et Stokes en 1896, leur longueur d'onde évaluée par Wien et par Sommerfeld. La fameuse expérience de diffraction des rayons X réalisée par Friedrich et Knipping en 1912 sur la suggestion de von Laue (1879-1960), puis les expériences de diffraction des électrons à partir de 1927, confirmèrent la structure réticulaire des cristaux, plus d'un siècle après l'hypothèse de Haüy, et les premiers modèles structuraux de Barlow. La théorie des groupes d'espace, considérée tout d'abord comme un exercice mathématique (on n'avait même pas la preuve définitive de l'existence des atomes), s'imposa dans la détermination des structures cristallographiques entreprise par Henry Bragg et son fils Lawrence. Des tabulations furent données par le suisse Paul Niggli en 1919 et l'américain Wyckoff en 1922, et les premières «Tables Internationales» - la Bible des cristallographes - publiées en 1935 par Bragg, von Laue et Hermann.

### 5. LE PRINCIPE DE SYMÉTRIE

La symétrie permet non seulement de décrire et de classer les systèmes possédant des invariances, mais aussi d'obtenir certaines de leurs propriétés qualitatives et de simplifier leur étude quantitative. Songeant à la symétrie bilatérale, Montesquieu le

disait déjà : «la raison qui fait que la symétrie plaît à l'âme, c'est qu'elle lui épargne de la peine, qu'elle la soulage et qu'elle coupe pour ainsi dire l'ouvrage par la moitié».

### 5.1. Quelques précurseurs

L'utilisation implicite du principe de symétrie, qui sera formalisé principalement par Curie, est ancienne.

– Anaximandre fut le premier philosophe grec, vers – 600, à considérer que la Terre est un objet isolé dans l'espace au centre de la sphère céleste. La Terre se trouvant à égale distance de tous les points du ciel, elle n'avait donc, selon lui, aucune raison de tomber vers l'un d'eux.

– D'après Archimède, si on place deux objets identiques sur les plateaux d'une balance parfaite, la balance reste en équilibre. On ne voit pas, en effet, pourquoi elle pourrait pencher d'un côté plutôt que de l'autre !

– Le philosophe français Buridan (1300-1366) considérait un âne placé à égale distance de deux tas de foin identiques : l'âne, ne sachant quel tas choisir, finissait par mourir de faim.

– Newton admettait que la Terre était de symétrie sphérique, et en déduisait que son champ de gravitation était radial.

– La question suivante fut examinée au XVIII<sup>e</sup> siècle : les étoiles s'effondrent-elles les unes sur les autres sous l'effet de leur attraction mutuelle ? Si les étoiles sont en nombre fini, un tel effondrement vers le point moyen de leur distribution initiale est inévitable, puisque la portée de la force de gravitation est infinie. Si elles sont en nombre infini et réparties de manière statistiquement homogène dans l'espace, il ne peut y avoir effondrement car aucun point de l'espace n'est privilégié par la symétrie statistique de translation.

– C'est par des considérations de symétrie relatives à des circuits électriques fermés en équilibre qu'Ampère, en 1826, détermina la loi d'interaction entre deux éléments de courants. Des considérations de symétrie sont également à l'origine de sa théorie des courants particuliers décrivant le magnétisme.

### 5.2. Le principe de symétrie de Neumann

Les nombreuses études d'optique cristalline (biréfringence et polarisation de la lumière, activité optique naturelle et magnétique) entreprises au début du XIX<sup>e</sup> siècle par Biot, Brewster, Fresnel, Arago, Malus, Herschel, Faraday, ... sont à l'origine du principe de symétrie. Dès 1830, Vivell affirma que la symétrie optique d'un cristal est identique à sa symétrie ponctuelle, ce qui n'avait rien d'évident : la morphologie d'un cristal dépend des conditions de croissance et ne reflète pas nécessairement sa symétrie interne. Puis Franz Neumann (1789-1895) affirma en 1833 que toutes les propriétés

physiques macroscopiques d'un cristal - propriétés thermiques, élastiques et électriques (pyroélectricité, conductivité), figures de pression, de choc et de corrosion, figures de Chladni, ... - possèdent sa symétrie ponctuelle (Neumann, en 1823, fut l'un des premiers cristallographes à utiliser la projection stéréographique).

### 5.3. Pasteur et la chiralité

Haüy avait précisé l'existence d'échantillons morphologiquement droits et gauches de quartz et observé le caractère racémique des gisements. En 1808, Malus découvrit fortuitement la polarisation de la lumière. En 1811, Arago découvrit l'activité optique du quartz ; en 1812, Biot constata que le quartz, suivant les échantillons, est dextrogyre ou lévogyre (en 1815, il découvrit l'activité de certaines solutions liquides). En 1820, John Herschel (1792-1871), fils du découvreur d'Uranus et astronome lui-même, démontra alors la relation entre le sens de rotation du plan de polarisation de la lumière et la chiralité des échantillons de quartz : pour la première fois, on relia donc explicitement le signe d'une propriété interne d'un cristal à sa symétrie extérieure.

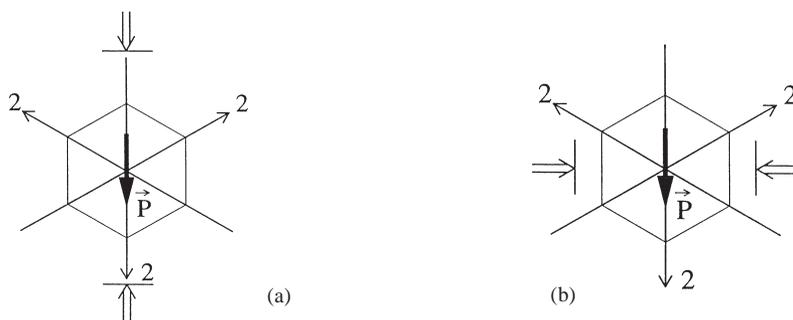
Puis, en 1844, le chimiste allemand Mitscherlich (1794-1863), qui avait établi les lois de l'isomorphisme, remarqua que les cristaux de tartrates doubles de sodium et d'ammonium sont actifs s'ils sont d'origine naturelle, inactifs s'ils résultent d'une synthèse chimique (paratartrates ou racémates) : tartrates et paratartrates avaient cependant même composition et même morphologie apparente. Exploitant cette observation en 1848, Pasteur (1822-1895) montra que le résultat de Herschel avait un caractère général. Il remarqua tout d'abord que le tartrate était hémédrique (d'où son activité), puis que le paratartrate, comme le quartz, se présentait sous deux formes hémédres énantiomorphes équiprobables (d'où son absence d'activité) : il tria les cristaux du conglomérat de paratartrate à la main et, après redissolution séparée, observa des activités optiques de sens opposés.

Biot ayant démontré en 1839 que le quartz fondu est inactif, Pasteur établit une distinction entre la dissymétrie de la molécule et celle de l'édifice cristallin. Il ne faisait aucune hypothèse sur les structures moléculaires ou cristallines, inconnues à l'époque, mais - précurseur à la fois de Curie et des stéréochimistes - il fut le premier à imaginer que des molécules pouvaient se présenter sous deux formes images l'une de l'autre dans un miroir : il parlait alors de «dissymétrie moléculaire», ou absence de centre ou plan de symétrie, entraînant l'activité optique (le terme de chiralité ne fut introduit que plus tardivement, en 1884, par Kelvin. On sait aujourd'hui que l'activité optique, caractérisée non par un scalaire axial mais par un tenseur d'ordre deux symétrique axial, le tenseur de gyration, est possible non seulement dans les onze classes chirales ou propres, mais également dans quatre classes non chirales ou impropres :  $m$ ,  $2mm$ ,  $\bar{4}$  et  $\bar{4}2m$ ).

Le Bel et Van't Hoff furent les premiers, en 1874, à proposer une représentation tridimensionnelle des molécules et à suggérer que, dans les molécules organiques, la chiralité est due à la présence d'atomes de carbone asymétriques, c'est-à-dire liés à quatre atomes voisins différents. Vant'Hoff utilisa la théorie de la tétravalence du carbone (proposée en 1858 par Kékulé, Butlerov et Couper pour imaginer une molécule tétraédrique de méthane) ; Le Bel aboutit à la même idée à partir de considérations de symétrie (absence d'activité optique du méthane). Werner, en 1911, découvrit un complexe de cobalt optiquement actif et démontra ainsi que la chiralité n'est pas liée exclusivement à la présence d'atomes de carbone asymétriques mais constitue un phénomène géométrique très général, observable aussi bien en chimie minérale qu'en chimie organique.

#### 5.4. La découverte de la piézo-électricité

C'est par des considérations de symétrie que les frères Jacques (1855-1941) et Pierre Curie prédirent puis découvrirent dès 1880, sur le quartz, le phénomène de piézo-électricité, pressenti avant eux par Coulomb, Haüy et Becquerel et exploité ensuite par Langevin (figure 2). La piézo-électricité inverse (apparition d'une déformation cristalline sous champ électrique) fut alors prédite par Lippman et observée peu après par les frères Curie. C'est par une démarche analogue que Meyer a imaginé en 1975 l'existence des cristaux liquides héliélectriques ou smectiques C\*.



**Figure 2 :** Effet piézo-électrique du quartz : la polarisation électrique apparaît selon un axe binaire, que la compression soit parallèle (a) ou perpendiculaire (b) à cet axe. L'axe ternaire du cristal est perpendiculaire au plan de la figure : si la compression est exercée selon cet axe, la symétrie du cristal n'est pas modifiée et aucune polarisation n'est observée.

### 5.5. Le principe de Curie

Le principe de Neumann fut précisé par Minnigerode (1884) : le groupe de symétrie de toute propriété cristalline est un sur-groupe du groupe ponctuel du cristal. Mais c'est surtout Pierre Curie (1859-1906) qui a généralisé le principe de symétrie à tous les phénomènes physiques, cristallins ou non, en particulier les phénomènes électromagnétiques, et l'a énoncé de manière claire et féconde en 1894 : «lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes».

Curie utilisa des symétries continues (axes de rotation d'ordre infini) déjà envisagées par Jordan, il énuméra les groupes continus les contenant (les sept «groupes limites» de Curie). Il fut le premier à préciser les symétries du champ électrique et du champ magnétique et la différence entre les vecteurs polaires et axiaux. Il interpréta l'expérience de Wiedemann (1826-1899), dans laquelle un fil conducteur placé dans un champ magnétique parallèle se tord (le sens de la torsion change avec celui du courant et du champ).

Curie montra qu'un effet n'est autorisé que dans un milieu de symétrie suffisamment basse : «c'est la dissymétrie qui crée le phénomène» (dissymétrie signifiant absence de telle ou telle opération de symétrie). Ainsi un cristal n'est pyroélectrique que s'il n'est pas centrosymétrique. Curie généralise ainsi les considérations de Pasteur sur le lien entre la présence d'une propriété physique, l'activité optique, et l'absence d'une propriété de symétrie, plan ou centre de symétrie : la symétrie passe alors de la description à la prévision. Comme l'a noté Curie lui-même, les prévisions fournies par son principe sont qualitatives : effets interdits et règles de sélection.

### 5.6. Détermination de la symétrie

Il est possible, sur la base du principe de symétrie, de déterminer la symétrie d'un système. Soit  $G$  la symétrie, inconnue, du système et  $K$  la symétrie d'une de ses propriétés :  $G$  est au plus égale à  $K$ . En étudiant la symétrie de plusieurs propriétés, on peut obtenir  $G$  «par excès».

L'étude de la morphologie d'un cristal ne fournit qu'une surestimation de sa classe, car toutes les faces naturelles possibles n'apparaissent pas nécessairement. Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, Fresnel montra que les propriétés optiques du cristal peuvent être caractérisées par l'ellipsoïde des indices : sa détermination ne permet d'obtenir que le système cristallin. Si le cristal présente un pouvoir rotatoire naturel, la classe est l'une des dix classes chirales, ou l'une des quatre classes non chirales  $m$ ,  $2mm$ ,

$\bar{4}$  et  $\bar{4}2m$ . De même la piézo-électricité est incompatible avec les onze classes centrosymétriques et la classe chirale 432.

La diffraction a permis d'obtenir une information plus précise sur la classe que les mesures optiques. D'après la loi de Friedel (1913), les deux faces d'un plan réticulaire réfléchissent un rayonnement de la même manière, que le cristal soit ou non centrosymétrique : la diffraction fournit donc la classe holoèdre ou groupe de Laue ; en cas de diffusion anormale seulement, on peut obtenir la classe exacte.

### 5.7. L'analyse dimensionnelle

Les lois de la physique sont invariantes dans tout changement du système d'unités ou, ce qui revient au même, dans tout changement d'échelle. De cette invariance, on peut déduire la forme mathématique des lois reliant les grandeurs caractérisant un système.

A la suite des travaux précurseurs de Galilée, Descartes, Newton, Leibniz et Euler, l'analyse dimensionnelle a été créée vers 1820 par Fourier. Elle a été développée par Reynolds, puis en France par Carvallo et Vaschy entre 1890 et 1896. Le théorème de Vaschy, qui joue un rôle comparable au principe de Curie, a été redécouvert en 1911 par Riabouchinsky et en 1920 par Buckingham et par Bridgman.

## BIBLIOGRAPHIE

- E. BAUER : *«Introduction à la théorie des groupes et à ses applications en physique quantique»*, Éditions Jacques Gabay, Paris (1991).
- COLLECTIF : *«La symétrie aujourd'hui»*, Collection «Points», série Sciences n° 59, Seuil, Paris (1989).
- COLLECTIF : *«Symmetries in Physics (1600-1980)»*, Proceedings of the first international meeting on the history of scientific ideas held in 1983, Université autonome de Barcelone (1987).
- P. CURIE : *«Œuvres»*, Gauthier-Villars, Paris (1908). Réimpression : Archives Contemporaines (1984).
- J. DIEUDONNÉ : *«Abrégé d'histoire des mathématiques»*, Hermann, Paris (1987). Voir aussi «La genèse de la théorie des groupes», La Recherche n° 103 (septembre 1979).
- E. FLINT : *«Principes de cristallographie»*, Mir, Moscou (1981).
- R. GAY : *«Cours de cristallographie»*, Gauthier-Villars, Paris (1959).

- J.-P. GLUSKER (éditeur) : «*Structural crystallography in chemistry and biology*», Hutchinson Ross Publishing Company, Stroudsburg, Pennsylvania (1981).
- A. HOLDEN : «*Shapes, space and symmetry*», Columbia University Press, New York (1971). Traduction française : «*Formes, espace et symétrie*», Les Distracts, éditions Cedic.
- M. von LAUE : «*Historical introduction*», in *International Tables for X-ray crystallography* volume I, Kynoch Press, Birmingham (1965).
- D. P. MELLOR : «*The evolution of the atomic theory*», Elsevier, Amsterdam (1971).
- J. NICOLLE : «*La symétrie*», Collection Que Sais-je, Presses Universitaires de France (1965).
- F. C. PHILLIPS : «*An introduction to cristallography*», Longman, New York (1978).
- M. SENECHAL : «*Crystalline symmetries*», Adam Hilger, Bristol (1990).
- A. V. SHUBNIKOV et V. A. KOPTSIK : «*Symmetry in science and art*», Plenum Press, New York (1974).
- J. SIVARDIÈRE : «*La symétrie en mathématiques, physique et chimie*», Grenoble Sciences, Presses Universitaires de Grenoble (1995).
- H. WEYL : «*Symmetry*», Princeton University Press, Princeton (1952). Traduction française : «*Symétrie et mathématique moderne*», Flammarion, Paris (1964).
- F. BECKER : «*Sur le principe de symétrie en mécanique classique*» - B.U.P. n° 587, octobre 1976.
- M. HULIN : «*Quelques considérations élémentaires relatives aux "raisons de symétrie"*» - B.U.P. n° 572, mars 1975.
- R. OCCELLI et A. ZMERLI : «*Propriétés physiques et symétries cristallines*» - B.U.P. n° 607, juillet-août-septembre 1978.

On trouvera dans la revue Sciences (avril 1995), publiée par l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, des articles très utiles de A. COLLET, L. BONPUNT, A. GUINIER et G. LOCHAK sur la «*Symétrie dans les phénomènes physiques*».