L'effet «Laplace»

par Robert GENTY

Il y a environ trente ans j'ai pensé utile, à juste titre, d'introduire dans les premières pages de mon cours de mécanique spatiale de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, quelques rappels de mécanique fondamentale accompagnés de commentaires. C'est ainsi que dans un dessein pédagogique, j'ai traité du problème dit de «Laplace» pour mettre en évidence - au profit de mes élèves - la vraie nature de l'accélération de Coriolis - 1967 -.

Or au début de 1994, la lecture d'articles circonstanciés m'a révélé que plusieurs professeurs de mécanique appliquée en océanologie et en météorologie tout particulièrement - butaient encore sur des difficultés du même ordre -. Et j'ai cru bon de rédiger un exposé sur ce sujet dans la revue X.Y.Z. de l'association française de topographie (premier trimestre 1994). Cet exposé rencontra une audience indubitable car la revue, «La Météorologie» organe de «Météo France» et de la «Société Météorologique de France», demanda et obtint l'autorisation de le reproduire. Ce qui fut fait dans son n° 8 de décembre 1994 («à propos de Coriolis»).

En vérité le point de vue pédagogique n'est pas le seul en cause et le n° 25 de 1988 des cahiers d'histoire et de philosophie des sciences (société Française d'Histoire des Sciences et des Technologies) consacré au travail de Monsieur le Professeur Gapaillard de l'Université de Nantes, montre que le problème de Laplace en lui-même retient encore l'attention du monde scientifique.

De cette étude, en effet, il apparaît que l'idée de base revient en réalité à Newton (1642-1727).

Son énoncé du même problème datant du 28 novembre 1679 est repris dans l'ouvrage en question sous la forme suivante :

«Étant donné A un corps lourd suspendu dans l'air et qui tourne avec la Terre de telle façon qu'il se trouve perpétuellement au-dessus du point B de celle-ci. Imaginons ensuite qu'on laisse tomber le corps A

et que sa gravité lui communique un autre mouvement vers le centre de la Terre sans que le précédent d'"ouest en est", s'en trouve diminué. Étant donné qu'avant sa chute le corps A étant plus éloigné du centre de la Terre que les parties de la Terre auxquelles il parviendra dans sa chute, il en résulte que le mouvement du corps d'"ouest en est" sera plus important que le mouvement d'"ouest en est" de ces parties de la Terre. Par conséquent, il ne descendra pas selon la perpendiculaire AB, mais en dépassant ces parties de la Terre il tombera à l'"est" de la perpendiculaire».

Pourtant Newton n'a pas laissé de traces tangibles de ses calculs et c'est dans un dessein de pure information que le professeur Jacques Gapaillaret a proposé une solution qui aurait pu être celle du grand savant anglais.

Il faut noter à ce propos que le professeur Gapaillaret suppose dans un premier temps, que l'accélération de la pesanteur g est constante et que la résistance de l'air est négligeable, pour aboutir à une formule procédant d'un raisonnement simpliste qu'il présente d'ailleurs comme faux.

Toutefois, il offre également avec les mêmes hypothèses fondamentales un calcul corrigé tout à fait valable, pour établir la formule de Laplace :

$$x = \frac{1}{3}\,\Omega \sqrt{\left(\frac{8h^3}{g}\right)} \cos \varphi$$

avec x écart sur l'est, Ω vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même, φ latitude du lieu, h hauteur de AB, g accélération de la pesanteur.

Venons en maintenant à Laplace lui-même, (1749-1827), qui fut certainement le premier à résoudre positivement par la voie mathématique, son propre problème dont voici l'énoncé datant de 1796 :

«Cependant la vitesse réelle due à la rotation de la Terre étant un peu moindre au pied qu'au sommet de la tour élevée, si de ce sommet on abandonne un corps à sa pesanteur, on conçoit qu'en vertu de l'excès de sa vitesse réelle de rotation sur celle du pied de la tour, il ne doit pas tomber exactement au point où le fil à plomb qui part du sommet

de la tour, va rencontrer la surface de la Terre, mais un peu plus à l'est de ce point.

L'analyse fait voir en effet que l'écart de ce point n'a lieu que vers l'est, qu'il est proportionnel à la racine carrée du cube de la hauteur de la tour et au cosinus de la latitude et qu'à l'équateur il est de 21,952 mm pour 100 m de haut».

Il en a donné la solution en 1803 soit sept ans après l'énoncé, en laissant un développement très complet que l'on trouve en annexe du livre de Jacques Gapaillaret et qui permet de le juger à sa juste valeur. Il fait intervenir un nombre important d'approximations dont la constance de g et celle de la densité de l'atmosphère, faisait apparaître une résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse.

Son calcul, en tout état de cause, est lourd et complexe, aboutissant a une expression longue et compliquée avec un logarithme et un arc tangente. En vérité c'est en supposant le mouvement dans le vide qu'il obtint la formule simplifiée :

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{8h^3}{g}\right)}\cos\varphi$$

déjà citée plus haut.

D'ailleurs avec les données géophysiques actuelles : latitude $\varphi = 0$, $g = 9{,}78019\ m/s^2$ à l'équateur, en $\Omega = 7{,}29212 \times 10^{-5}\ rad/s$, il vient pour l'écart vers l'est une application de la formule ci-dessus :

$$x = 21{,}987\ mm$$

valeur très voisine de celle de Laplace dans les mêmes conditions soit :

$$x = 21{,}952\ mm$$

Après Laplace, c'est principalement le géophysicien Gauss (1777-1855) qui se pencha sur le même problème.

Il est clair que son travail reproduit en annexe du livre de Jacques Gapaillaret, est beaucoup plus accessible que celui de Laplace. Et, il a le grand mérite de faire valoir - bien avant la lettre - la force centrifuge composée qu'on appelle couramment la force de Coriolis.

Mais c'est en faisant g constant dans la formule et en introduisant la notion de «véritable chute» ; $\frac{1}{2}\,g\,t^2$, qu'il obtient l'expression de Laplace :

$$x = \frac{1}{3}\,\Omega\,\sqrt{\left(\frac{8h^3}{g}\right)}\cos\varphi$$

Dans les années qui suivirent et tout spécialement après 1850, la question ne présenta pas le même intérêt, les travaux de Gustave Coriolis (1792-1843) ayant pénétré peu à peu les milieux pédagogiques, leur usage en cette occurrence permettant de résoudre le problème de Laplace en trois lignes de calcul.

Toutefois en 1881, l'astronome Camille Flammarion publia, dans son «astronome populaire», le calcul de la déviation vers l'est pour une hauteur de chute de 100 m, à l'équateur où la latitude φ est nulle et où $g = 9{,}780319\ m/s^2$.

Très curieusement, il trouva la valeur de 33 mm ce qui ne pouvait qu'être le résultat d'une erreur à partir d'un raisonnement trop rapide donnant une formule fausse déjà dénoncée dans les pages précédentes. La bonne formule fournit d'après Laplace lui-même, et dans les hypothèses précitées la valeur : 21,952 mm et, d'après mes propres travaux : 21,987 mm, comme nous l'avons vu.

Il est tout à fait évident que Camille Flammarion passionné du cosmos et très honnête homme, s'aperçut bientôt de son erreur qu'il répara par la suite.

«L'astronome honteux et confus, jura, mais un peu tard, qu'on ne l'y prendrait plus».

Et c'est bien ce qui se passa.

Aussi serait-il assez vil de lui jeter la pierre.

En effet, dans le même temps, Camille Flammarion n'a-t-il pas choisi de calculer l'écart vers l'est, dans le cas d'une chute à partir du sommet des tours de Notre-Dame de Paris dont la hauteur est de 101 m.

Il obtint alors très justement la valeur de 15 mm.

Longtemps après, l'excellent mécanicien que fut Bouasse, établit, par la méthode de Coriolis, la formule de Laplace dans un ouvrage publié en 1923 chez Delagrave et intitulé «Gyroscopes et projectiles».

Mais, il faut ajouter que, cherchant à retrouver le même résultat directement, il en arriva - singulièrement - à une équation pendulaire, introduisant dans la formule, un sinus fort embarrassant.

C'est dans ces conditions qu'il m'a été donné de prendre en considération, l'ensemble historique du problème de Laplace en commençant par Newton, à qui le professeur Gapaillaret prête une plume habile, en continuant par Laplace puis Gauss et Bouasse, pour comparer leurs raisonnements à celui que je tiens depuis 1967 - ceux du professeur J. Gapaillaret (1988) ; de l'ingénieur R. Vincent (1994) ; du mathématicien Ph. Rossi (1995) - étant nettement postérieurs.

* * *

Mais auparavant, qu'il me soit permis de faire le procès d'une démarche de pensée simpliste déjà évoquée plusieurs fois dans les pages qui précèdent et qui fit tant de tort à Camille Flammarion.

Considérons le cas général d'une tour AB verticale, de hauteur h à la latitude φ.

D'après ce que dit Laplace, la vitesse du sommet A est en excédent par rapport à celle de B, d'une quantité égale à :

$$\Omega\,(R + h)\cos\varphi - \Omega\,R\cos\varphi$$

(avec Ω vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même et R rayon de la Terre supposée sphérique). Cet excédent vaut donc :

$$V_a = \Omega\,h\cos\varphi \qquad \text{voir figure 1}$$

En admettant que le point B est immobile et que le point A est animé de la vitesse $\Omega\,h\cos\varphi$, un point matériel lâché de A doit tomber en C à la distance horizontale x_1, de B, comptée vers l'est de B vers C telle que :

$$x_1 = \Omega\,h\,T\cos\varphi$$

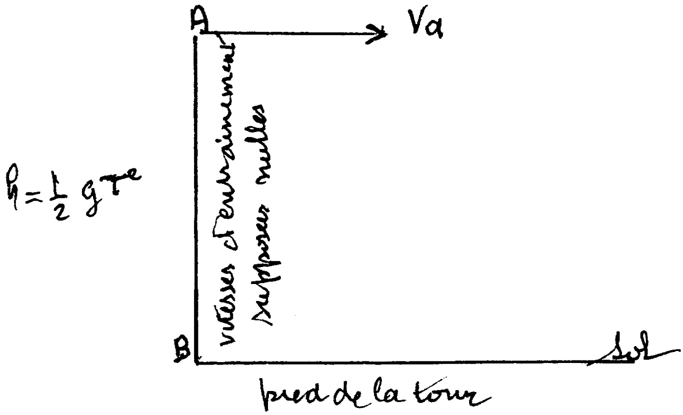

Figure 1 : Croquis erroné.

T étant le temps de chute de la hauteur h qui satisfait d'autre part à :

$$h = \frac{1}{2} g\, T^2$$

g étant l'accélération de la pesanteur supposée constante d'où :

$$T = \sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)}$$

on peut alors écrire : $x_1 = \Omega\, h \sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)} \cos \varphi$

ou $x_1 = \frac{1}{2}\, \Omega \sqrt{\left(\frac{8h^3}{g}\right)} \cos \varphi$

expression conforme aux dires de Laplace puisque proportionnelle à la racine carrée du cube de la hauteur h et au cosinus de la latitude φ.

Calculons la valeur numérique de x_1 pour $h = 100$ m à l'équateur où $\varphi = 0$. Nous prendrons $g = 9{,}78032 \text{ m/s}^2$ ou plus simplement $g = 9{,}78 \text{ m/s}^2$ avec $\Omega = 7{,}29212 \times 10^{-5}$ rad/s.

On obtient :

$$x_1 = \frac{7{,}29212}{2 \times 10^5} \sqrt{\left(\frac{8 \times 10^6}{9{,}78}\right)} = 0{,}032976 \text{ m}$$

ou $x_1 = 32{,}97$ mm (très voisin du premier résultat de Flammarion).

Valeur beaucoup trop grande pour être rapprochée de celle de Laplace = 21,952 mm.

C'est là la preuve formelle du défaut de raisonnement que l'on dénonce.

La formule $x_1 = \frac{1}{2} \Omega \sqrt{\left(\frac{8h^3}{g}\right)} \cos \varphi$ est donc fausse au grand dam de Camille Flammarion.

Et voici pourquoi !

Lorsque l'on considère la chute du point matériel animé en A, et par rapport à B supposé immobile, de la vitesse horizontale vers l'est $V_q = \Omega\, h \cos \varphi$, on s'aperçoit - comme le remarqua fort justement Newton - qu'il traverse des domaines liés à la Terre situés entre les altitudes h en A et O en B qui eux-mêmes sont en mouvement du fait de la rotation de la Terre, avec des vitesses horizontales comptées vers l'est, comprises entre $\Omega\, h \cos \varphi$ en A et O en B (figure 2).

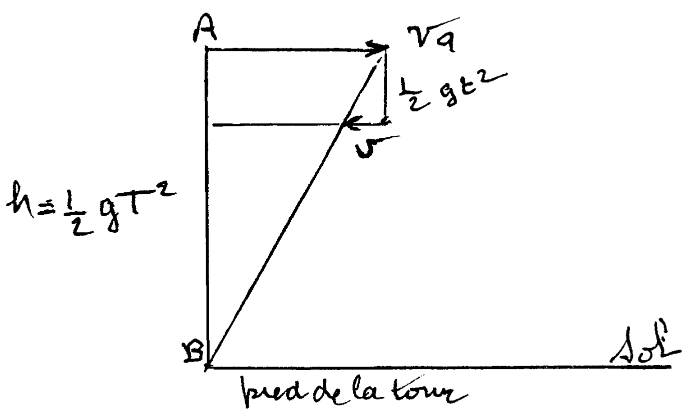

Figure 2 : Croquis exact.

Il s'ensuit que dans le premier instant dt de la chute, il y a lieu de noter que la vitesse $\Omega\, h \cos\varphi$ du point A est légèrement supérieure à $\Omega\,(h - dh)\cos\varphi$. dh étant la chute correspondant au temps dt. Cette vitesse est celle du point A' placé immédiatement au-dessous du point A à la distance verticale dh de celui-ci, entraînant en effet le point matériel vers l'est, mais beaucoup moins vite que dans l'hypothèse ci-dessus où, implicitement, on a dévolu à toutes altitudes de B à A, une vitesse horizontale nulle, tout comme en B, à l'exception du point A animé, ainsi qu'on l'a déjà vu de la vitesse $\Omega\, h \cos\varphi$ vers l'est.

Il va sans dire que cette dernière démarche de pensée avait conduit Camille Flammarion, entre autres, à trouver une valeur de x_1 trop grande, soit 33 mm.

Il convient donc de calculer la valeur x_2 sur l'horizontale de B que l'on a comptée en trop pour la retrancher de x_1.

La différentielle dh, correspondant au temps dt va nous guider dans notre raisonnement (figure 2).

En effet, la tranche d'altitude dh donne naissance à une vitesse différentielle :

$$dv = \Omega\, dh \cos\varphi \quad \text{avec} \quad dh = g\, t\, dt$$

d'où :

$$dv = \Omega\, g\, t \cos\varphi\, dt$$

et la vitesse horizontale v qui en découle, comptée négativement est, à l'instant t :

$$v = \frac{1}{2}\,\Omega\, g\, t^2 \cos\varphi$$

L'espace x_2 compté en trop sera :

$$x_2 = \frac{1}{6}\,\Omega\, g\, t^3 \cos\varphi \qquad \text{au temps t}$$

et au temps T, il vient :

$$x_2 = \frac{1}{6}\,\Omega\, g\, T^3 \cos\varphi = \frac{1}{6}\,\Omega \sqrt{\left(\frac{8h^3}{g}\right)} \cos\varphi$$

Effectuons la soustraction $x_1 - x_2$

$$x = x_1 - x_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\Omega \sqrt{\left(\frac{8h^3}{g}\right)} \cos \varphi$$

soit : $$x = \frac{1}{3}\,\Omega \sqrt{\left(\frac{8h^3}{g}\right)} \cos \varphi$$

résultat identique à celui de Laplace.

Remarquons que cette dernière formule est parfaitement conforme à l'énoncé de Laplace.

* * *

Toutefois, il ne faudrait pas croire que le développement ci-dessus ne constitue qu'une seule spéculation mathématique. En vérité, la formule de Laplace est aussi d'un emploi courant de la part d'ingénieurs et de techniciens, principalement dans le domaine de la topographie et plus spécialement, de la topographie souterraine.

Nombreux sont les exemples d'expériences portant sur l'application numérique de la formule de Laplace dont je citerai les plus spécifiques.

Pourtant avant d'aborder le sujet lui-même, je souhaiterais donner ci-après le tableau des valeurs des écarts de Laplace pour des hauteurs allant de 10 à 100 mètres à Paris situé à la latitude :

$$\varphi = 48°51/\text{Nord} \quad \text{avec} \;\; g = 9{,}80989 \text{ m/s}^2$$

(coefficient de $\sqrt{h^3} = 1{,}444582 \times 10^{-5}$).

h en mètres	$\sqrt{h^3}$	**Écart de Laplace en millimètres**
10	31,622	0,457
20	89,443	1,292
30	164,317	2,374
40	252,982	3,654
50	353,553	5,107
60	464,758	6,714
70	585,652	8,450
80	715,542	10,336
90	853,815	12,334
100	1000	14,446

Tableau

* * *

Pour en revenir aux opérations elles-mêmes il est incontestable que le premier expérimentateur du procédé de Laplace fut Jean Dominique Cassini dit Cassini I^{er} qui venait d'être nommé par le roi Louis XIV à la direction de l'Observatoire de Paris dont la construction avait été récemment réalisée par l'architecture Claude Perrault en 1672.

Il est évident que Cassini I^{er} ne pouvait avoir utilisé la formule que Laplace allait établir plus d'un siècle plus tard.

Toutefois, il avait très certainement eu connaissance de la lettre écrite par Newton le 28 novembre 1679 avant la publication neuf ans après de ses «principes mathématiques de la philosophie naturelle» ou plus simplement ses «principia» datant de 1687 et dont j'ai reproduit le texte tout au début de cet article.

Qu'il me soit permis en lisant attentivement ce texte de dire combien j'ai été - à proprement parlé - confondu par son caractère lumineux qui n'autorise absolument pas à prêter à Newton un raisonnement «simpliste» déterminant une formule inexacte. Alors que l'énoncé de Laplace, que j'ai également cité intégralement, est nettement plus ambigu quant au phénomène en cause.

Quoi qu'il en soit, il est clair que, quelque deux cent soixante-dix ans plus tard j'étais moi-même, loin de me douter que, franchissant la salle de l'observatoire surmontée par la coupole édifiée au début du XIX^{e} siècle, je foulais aux pieds un puits profond de 56 mètres et débouchant dans les célèbres catacombes de Paris, alors que je fréquentais les lieux très assidûment pour mes propres observations nocturnes.

C'est ainsi que Cassini I^{er} put profiter d'une excellente conjoncture au cours de la finition des travaux, qui dégageait une profondeur totale de 56 mètres - d'aucuns disent cinquante-quatre mètres - Paris se retrouvant à la latitude $\varphi = 48°51'$ Nord avec $g = 9{,}80989\ m/s^2$, l'écart calculé aurait dû être de 6,714 mm.

Pourtant, Cassini ne laissa pas - à mon sens - de traces écrites de son expérience.

Il s'agissait pourtant là, d'une grande première. Il fallut attendre 1831 l'essai du professeur Reichs à Frieberg en Saxe dont la latitude est $\varphi = 50°55'$ Nord avec $g = 9{,}81151\ m/s^2$. La hauteur de chute étant de 158 mètres. La déviation observée fut alors de 28,3 mm pour une valeur calculée, à l'époque de 27,5 mm et par mes soins de 27,478 mm, conjonction tout à fait remarquable.

En 1902, le professeur Hall de l'Université de Harvard aux États-Unis, entreprit de procéder à une expérience portant sur une hauteur de 23 mètres pour une latitude :

$$\varphi = 39°00' \text{ Nord} \quad \text{avec} \quad g = 9{,}80092\ m/s^2$$

Il observa une déviation vers l'est de 1,5 mm pour une valeur calculée par ses soins de 1,8 mm et par moi même de 1,88 mm, ce qui est excellent.

Enfin, l'année suivante - en 1903 - Camille Flammarion, décidément poursuivi par sa faute initiale, voulut effectuer une mesure en utilisant la coupole du Panthéon haute de 68 m. Il obtint les résultats suivant :

– déviation observée : 7,6 mm,
– déviation calculée par lui : 8,1 mm,
– déviation calculée par moi : 8,1 mm également.

Camille Flammarion avait, fort heureusement, mis la barre du bon côté.

Cette série d'expériences menées en toute conscience avec plus ou moins de bonheur, montre cependant à l'évidence que ce que l'on peut appeler valablement l'«effet Laplace» comme on dit l'effet Compton, l'effet Coanda, l'effet Pogo, l'effet photoélectrique ou l'effet Cèrenkow, était à même de trouver des applications pratiques.

Nous avons vu plus haut que les premiers utilisateurs du procédé ont été des topographes et plus spécialement des topographes souterrains.

Mais à quelles fins ?

Tout simplement, au transport depuis la surface du sol de directions géographiques dûment repérées ou la détermination de pieds de verticales (figure 3).

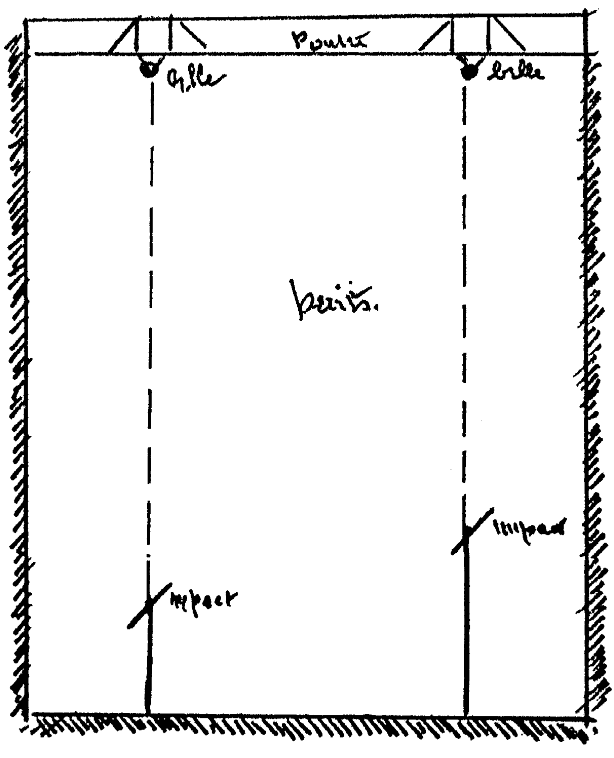

Figure 3 : Schéma du dispositif mécanique utilisant le procédé Laplace.

Dans tous les cas, il faut pouvoir disposer d'une poutre placée en travers du sommet d'un puits.

Cette poutre supporte deux appareils largueurs - je dis bien «largueurs» et non pas «lanceurs» - de masses pesantes, la plupart du temps des billes d'acier.

Pour le transport de directions il faut, à la surface du sol, définir l'alignement des centres des deux billes dans la direction choisie.

Les billes étant larguées, tombent en gravité sur deux réceptacles inclinés sur la verticale de chaque bille. Pour retrouver la direction en profondeur, il suffira de déterminer le plan vertical des centres des deux impacts à l'aide d'un théodolite placé au fond du puits.

Toute horizontale de ce plan vertical répond à la question.

Pour le transport des pieds de verticales, il faut que l'alignement des centres des billes en surface soit rigoureusement «ouest - est», et le même processus que ci-dessus permet de définir en souterrain des directions également «ouest - est», en particulier, pour les horizontales passant rigoureusement par les centres des impacts. A partir de ces deux centres et en s'orientant vers l'ouest, il conviendra de compter une longueur égale à l'écart de Laplace, pour définir la position de chacun des pieds des deux verticales des centres des deux billes en surface.

Bien entendu, il sera nécessaire de s'entourer de plusieurs précautions fondamentales, par exemple : éviter les courants d'air, réduire à un minimum l'humidité de l'atmosphère ambiante.

Il faudra aussi et surtout, s'assurer de l'absence de toute vitesse initiale parasite des deux billes au départ.

Pour cela, il sera avantageux d'opérer le largage à l'aide d'un électroaimant sans rémanence. La simple interruption du courant électrique d'alimentation, libérera les billes sans vitesse initiale.

Au titre d'un tel type d'expérimentation je citerai celle de l'E.D.F. - au cours de travaux de barrage entrepris sur le territoire de la commune de Rebondanges dans l'Orne. - Cette opération menée par le R.E.M.

Nord et terminée en 1959, mettait en œuvre un puits de 46 mètres de profondeur pour une latitude $\varphi = 48°49'$ Nord et $g = 9{,}80964\ m/s^2$.

Avec une erreur moyenne de 1 mm, le rayon moyen d'indécision était compris entre 3 et 5 mm pour une écart de Laplace de 4,51 mm, calculé par mes soins. Ce qui donne le degré de validité de l'expérience elle-même.

CONCLUSION

N'est-il pas surprenant mais aussi très encourageant de constater, d'après l'exposé précédent que d'une considération hautement specuculative, sur le plan intellectuel - puisque s'agissant de la preuve de la rotation de la Terre sur elle-même, recherchée par Newton - on en arrive par des déductions successives à cet entendement tout pragmatique que des topographes souterrains utilisent soit pour le transfert de directions soit pour la détermination des pieds de verticales.

Et quelle humilité doit être la nôtre en nous rendant compte que ces concepts de haute élévation spirituelle déboucheront de la façon la plus banale dans une énumération des moyens employés en travaux publics souterrains à savoir : d'ordre, magnétique, optique, gyroscopique ou mécanique (effet Laplace).

Au surplus cela est bien dans la démarche de la pensée humaine.

Aussi bien, les difficultés nées au cours de trois siècles consécutifs sont la preuve de l'effort permanent qu'il a fallu consentir.

Il convient de se garder de formuler à l'occasion de quelques erreurs, une critique quelconque. Tout au contraire il y a lieu de magnifier cette foi dans une volonté constante d'aller toujours plus loin pour faire toujours mieux. Parmi tous les savants en cause, il en est un singulièrement fascinant, le prestigieux Isaac Newton puisque dès 1680 cet esprit exceptionnel avait, non seulement admis la rotation de la Terre sur elle-même, mais aussi pressenti le moyen de le prouver.

BIBLIOGRAPHIE

– Robert GENTY : *Cours de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, Mécanique spatiale, Mécanique fondamentale* - 1967.

– Jacques GAPAILLARET : *Les mouvements de la terre et la détection de sa rotation par la chute des corps* - Cahier d'histoire et de philosophie des sciences n° 25 - 1988.

– Robert GENTY : *«A propos de Coriolis»* - X.Y.Z. Revue de l'Association française de topographie - 1er trimestre 1994.

– Robert GENTY : *«À propos de Coriolis»* - La Météorologie - Revue de Météo France et de la Société météorologique de France - Huitième série n° 8 - décembre 1994.

– Robert VINCENT : *«Eppur, si muove»* ou *«À propos de Galilée»* - X.Y.Z. Revue de l'Association française de topographie - 4e trimestre 1994.