

La bille qui rebondit : une expérience simple pour aborder la physique du chaos

par Pierre BOISSEL

Enseignant à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Laboratoire de Photophysique Moléculaire

Bâtiment 213, Université Paris Sud-Orsay, 91405 Orsay Cedex

RÉSUMÉ

L'étude d'un dispositif mécanique très simple, une bille rebondissant sur un plateau vibrant, permet d'illustrer de façon pédagogique et progressive les principaux concepts utilisés dans la physique des systèmes chaotiques. Cette expérience peut en outre fournir un thème de travail motivant pour des projets de travaux pratiques ou de calcul numérique sur ordinateur.

1. INTRODUCTION

La science du chaos est une des avancées importante de la physique actuelle. Jusqu'à ces dernières années, l'attitude habituelle du physicien obtenant un comportement erratique au cours d'une expérience était de jeter les résultats au panier en soupçonnant l'intervention d'une quelconque perturbation extérieure. Ce n'est que récemment que l'on s'est rendu compte, d'une part que des comportements chaotiques pouvaient apparaître de façon intrinsèque, même dans des systèmes comportant un petit nombre de degrés de liberté, d'autre part, que l'étude de ces comportements sur des cas simples permettait de dégager des concepts utiles pour la compréhension de systèmes plus complexes.

Dans le cadre d'une série de projets de Travaux Pratiques de Licence de Physique à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), nous avons choisi d'étudier l'apparition du chaos dans un système mécanique : une bille rebondissant sur un plateau oscillant. Ce thème, prévu au départ essentiellement pour pratiquer l'acquisition et le traitement de données expérimentales sur microordinateur, s'est révélé en fait beaucoup plus riche. En effet, ce système permet d'aborder de

façon pratique les idées essentielles de la physique du chaos. De plus, en raison de particularités mathématiques sur lesquelles nous reviendrons, l'approche expérimentale peut être menée en parallèle avec une simulation purement numérique qui la complète et la prolonge.

Cet exposé ne vise pas à refaire une étude générale de la physique du chaos. Son but est plutôt d'illustrer les concepts importants (soulignés typographiquement dans le texte) par des exemples concrets pris sur l'expérience, renvoyant le lecteur aux ouvrages généraux (références [1-3] par exemple) pour une étude plus approfondie. Le détail de l'expérience et la méthode de simulation sur ordinateur sont présentés en section 2. La section 3 décrit ensuite la transition vers le chaos et le régime chaotique lui-même, en mettant l'accent sur les points qui ont un caractère d'universalité. La stabilité des différents régimes est discutée dans la section 4, d'un point de vue intuitif, puis dans une comparaison quantitative avec l'expérience. Enfin, la section 5 aborde la notion de bistabilité, une autre caractéristique fréquemment rencontrée dans les systèmes non-linéaires.

2. PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIENCE

2.1. Dispositif expérimental

La description de l'expérience peut tenir en une phrase: il s'agit d'étudier les rebondissements d'une bille sur un plateau horizontal animé d'un mouvement alternatif dans la direction verticale. Cependant, quelques astuces techniques sont nécessaires pour que le système réel corresponde effectivement à ce modèle simple.

2.1.1. Partie mécanique (Figure 1)

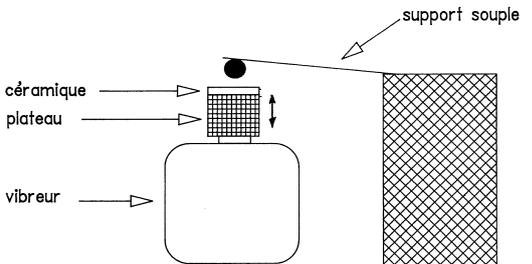


Figure 1 : Dispositif expérimental, partie mécanique.

Pour que les chocs de la bille ne perturbent pas le mouvement sinusoïdal vertical du plateau, la différence des masses doit être importante. La bille d'acier ayant une masse de l'ordre du gramme, le plateau est constitué d'un bloc de laiton d'une centaine de grammes. Il est mis en mouvement par un vibreur électromagnétique (type V 101 de Linear Dynamic Systems) alimenté par un générateur basse fréquence.

La détection du choc est effectuée au moyen d'un disque en céramique piézoélectrique (P 1-60 de Quartz et Silice) collé sur le bloc de laiton. Le choc de la bille sur cette céramique produit une impulsion électrique permettant de déterminer l'instant et l'intensité de l'impact.

La dissipation d'énergie, indispensable pour observer correctement la transition vers le chaos, est fournie par un simple morceau d'adhésif (adhésif plastique du type isolant électrique) collé sur la céramique pour amortir le rebond de la bille.

Le point le plus délicat est la fixation de la bille. Le support souple, en papier ou en plastique, n'est pas seulement destiné à éviter de retrouver la bille sous la table. Il permet d'obtenir des conditions strictement reproductibles d'un choc à l'autre, en particulier d'avoir toujours le même point d'impact sur la céramique. En revanche, il ne doit pas intervenir dans le mouvement, ni par un effet de ressort, ni par d'éventuelles fréquences propres de vibration.

Enfin, le support de l'expérience elle-même ne doit pas être quelconque. Une table ordinaire a généralement des fréquences de résonance au voisinage de la fréquence d'excitation du vibreur (~ 30 Hz) qui peuvent perturber notablement les résultats. Une paillasse de Travaux Pratiques convient très bien. A défaut, un découplage des vibrations peut être obtenu avec un bloc de béton posé sur un feutre amortisseur.

2.1.2. Acquisition de données

Une fois la partie mécanique mise au point, une première approche de l'expérience consiste simplement à observer, à l'œil et à l'oreille, le mouvement de la bille pour différentes amplitudes de vibration du plateau. La deuxième étape, plus quantitative, est l'observation simultanée sur l'oscilloscope de l'impulsion correspondant à l'impact de la bille et de la tension d'alimentation du vibreur.

Cependant, l'exploitation des résultats expérimentaux peut être faite de façon plus approfondie en couplant l'expérience à un microordinateur par l'intermédiaire d'une carte d'interface multifonctions. N'importe quel type de carte, disposant de deux entrées avec convertisseur analogique-numérique, d'une entrée numérique et d'une horloge chronomètre peut convenir. Nous avons utilisé une carte PCL 712 (Advantech) ou PC-MES2.

Avant d'être exploités, les signaux électriques provenant de l'expérience doivent être mis en forme dans une interface électronique externe. Cette électronique, largement inspirée de la référence 4b, a été mise au point au cours des projets. Le schéma de principe est présenté sur la figure 2.

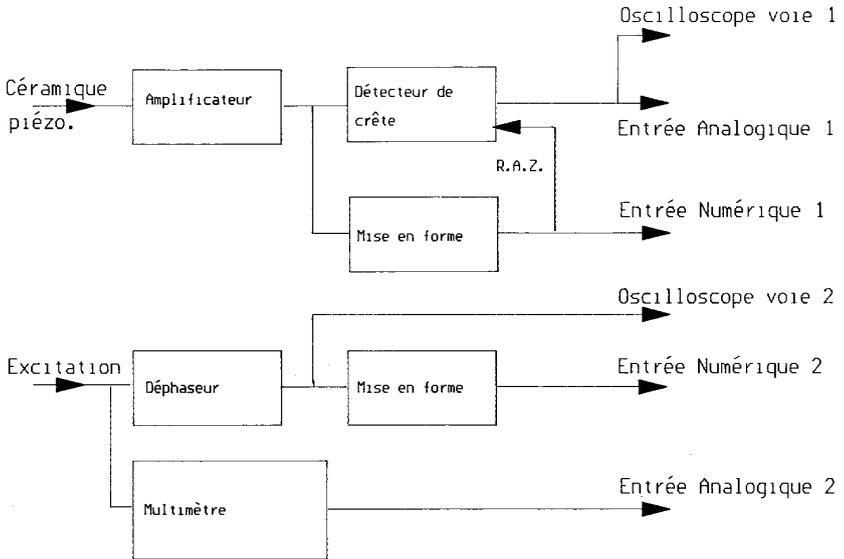


Figure 2 : Représentation schématique de l'électronique.

L'impulsion aux bornes de la céramique piézoélectrique passe tout d'abord dans un premier amplificateur permettant un découplage et une adaptation de niveau. La sortie de cet amplificateur est dirigée d'une part sur un étage détecteur de crête qui permet de garder en mémoire la valeur maximum, d'autre part sur un circuit de mise en forme

fournissant un signal rectangulaire entre 0 et 5 V, de largeur fixe. Le flanc de montée de ce signal sert à déterminer l'instant de l'impact par l'intermédiaire de l'entrée numérique de la carte d'interface. Le flanc de descente déclenche la remise à zéro du détecteur de crête après un délai suffisant pour que la conversion analogique numérique soit effectuée.

Parallèlement, une fraction de la tension d'alimentation du vibreur, après passage dans un circuit déphaseur, est transformée en signal carré (0 V-5 V) et envoyée sur un autre bit de l'entrée numérique pour être utilisée comme référence de temps. Le circuit d'entrée est destiné à compenser l'écart de phase entre la tension électrique et le mouvement. La détection des événements est effectuée par l'intermédiaire des bits de l'entrée numérique plutôt que par l'entrée analogique car l'interrogation d'un port d'entrée-sortie est beaucoup plus rapide que la conversion d'une tension analogique qui peut prendre plusieurs dizaines de microsecondes..

Enfin, l'amplitude de la tension d'alimentation est mesurée par un multimètre (Keithley 177) dont la sortie analogique est envoyée sur la deuxième entrée analogique de la carte d'interface.

2.2. Simulation numérique

Un système simple expérimentalement ne l'est pas forcément du point de vue du calcul. La plupart des systèmes mécaniques analogues sur lesquels on peut étudier le chaos (boussole, pendules couplés...) nécessitent l'intégration dans le temps d'équations différentielles non linéaires, ce qui ne peut se faire que numériquement, par des méthodes plus ou moins complexes, avec des problèmes de propagation d'erreurs dès que l'on veut un temps un peu long. Le point important est qu'ici, la seule équation différentielle intervenant est celle de la chute libre. La non-linéarité du problème réside uniquement dans l'intersection d'une parabole et d'une sinusoïde. Cette intersection étant le seul calcul numérique à effectuer, la simulation du mouvement peut être effectuée sans difficulté sur un microordinateur avec une très bonne précision et une grande rapidité.

La structure du calcul est relativement simple. Après le choc numéro n , la bille, arrivée avec une vitesse finale v_{fn} , repart à l'instant t_n , avec une vitesse initiale v_{in} , d'une altitude z_n qui est celle du plateau à cet instant. Elle poursuit alors sa trajectoire suivant les équations de la chute libre, jusqu'à ce qu'elle rencontre à nouveau le plateau.

L'amortissement est pris en compte par le coefficient de restitution μ donnant le rapport entre les vitesses relatives avant et après le choc :

$$v_{in} - V(t_n) = -\mu \cdot [v_{fn} - V(t_n)] \quad \{1\}$$

$V(t_n)$ étant la vitesse du plateau à l'instant du choc t_n .

Cependant la bille ne rebondit pas toujours sur le plateau. Elle peut, par moments, atterrir dessus, rester collée un certain temps, et repartir seulement lorsque le plateau redescend assez vite pour que son accélération dépasse l'accélération de la pesanteur. Il est donc nécessaire, du point de vue de la programmation, de distinguer les périodes où la bille est en vol libre de celles où elle est collée sur le plateau, de traiter les événements de rebond et de décollage et enfin, à l'atterrissage, de fixer un seuil de vitesse en dessous duquel la bille ne rebondit plus pour éviter une série "infinie" de rebonds de hauteur décroissante.

Pour des valeurs fixées de l'amplitude du mouvement du plateau A_0 et du coefficient de restitution μ le calcul permet donc de suivre le mouvement de la bille au cours du temps à partir de conditions initiales v_{i1} τ_1 arbitraires. On peut alors, soit laisser passer quelques rebonds pour éliminer les transitoires et étudier les trajectoires dans les différents régimes permanents (section 4), soit au contraire s'intéresser aux régimes transitoires eux-mêmes (section 5).

La simulation proprement dite est faite en extrayant du calcul les données correspondant au choc, pour différentes valeurs de l'amplitude d'excitation. La variation de cette amplitude peut être programmée (rampes, valeurs discrètes...), mais la comparaison avec l'expérience est encore plus parlante en utilisant un potentiomètre relié à l'entrée destinée aux manettes de jeu. La rotation du bouton de ce potentiomètre devient alors l'équivalent exact de la rotation du bouton de niveau du générateur B. F. .

2.3. Analyse des données expérimentales

Sans entrer dans le détail de leur signification pour l'instant, un simple coup d'oeil aux figures 3, 5d et 6 montre un bon accord qualitatif entre les résultats expérimentaux et le calcul. Pour aller au-delà, il faut analyser la signification exacte des signaux issus de l'expérience.

Le mouvement du plateau est repéré au moyen de la tension électrique d'alimentation du vibreur. On admet que l'amplitude de ce mouvement, notée A_0 et exprimée en mm dans le calcul, est proportionnelle à la tension efficace lue par le multimètre.

Le déphasage τ_n est l'intervalle de temps entre l'instant du choc t_n et l'instant T_{n-1} où le plateau passe à son point haut après le choc $n-1$. τ_n peut donc être supérieur à la période T . Expérimentalement, le déphasage entre l'excitation électrique et le mouvement n'est pas mesuré directement, l'origine de τ est donc arbitraire, par contre la mesure du temps étant rapportée à une période, la calibration de l'axe est exacte.

L'intensité du choc se traduit expérimentalement par une impulsion de tension dont l'intégrale dans le temps est proportionnelle à la quantité de mouvement fournie à la céramique, donc à la variation de la quantité de mouvement de la bille $M(v_{in} - v_{fn})$. La forme temporelle de l'impulsion étant fixe, la valeur crête est une mesure de cette intégrale. La quantité équivalente au niveau du calcul est donc la différence algébrique des vitesses $v_{in} - v_{fn}$ avec là aussi un coefficient de proportionnalité qui ne sera pas explicité.

En dehors de ces coefficients multiplicatifs et de la valeur du déphasage, le seul paramètre ajustable dans le calcul est le coefficient de restitution μ . Une détermination expérimentale directe de ce paramètre est possible avec le même appareillage. En effet, lorsque la bille est lâchée d'une certaine hauteur au dessus du plateau immobile, la suite des intervalles de temps entre les chocs successifs décroît exponentiellement selon la loi :

$$t_{n+1} - t_n = (t_1 - t_0) \cdot \mu^n$$

Cette mesure conduit à des valeurs de μ de l'ordre de 0.5 dépendant du type d'adhésif utilisé et du nombre d'épaisseurs. On note au passage que, contrairement à l'intuition, le coefficient de restitution augmente avec le nombre d'épaisseurs.

La fréquence utilisée tout au long de l'étude est de 30 Hz. Les variations de fréquence et d'amplitude de l'excitation se combinant au sein du paramètre sans dimensions $A_0\omega^2/g$, une modification de la fréquence introduit simplement une homotétie sur les valeurs de A_0 , ce qui a été vérifié expérimentalement.

2.4. Versions simplifiées de l'expérience

Les deux points onéreux du montage, en dehors de l'ordinateur, sont le vibreur ($\approx 4\ 000\ \text{F}$) et la carte d'interface ($\approx 3\ 000\ \text{F}$). Sur le premier point, dans une version simplifiée de l'expérience, il doit être possible d'utiliser une masse moins importante, qui pourrait alors être mise en mouvement par un simple haut-parleur. L'accord quantitatif avec le modèle serait sans doute moins bon mais le comportement qualitatif doit être très semblable. Par ailleurs, la détection du choc peut être faite au moyen des pastilles de céramiques piézoélectriques utilisées pour la sonnerie dans toutes les montres à quartz.

En ce qui concerne la carte d'interface, une grande partie des résultats peuvent être obtenus sans couplage à l'ordinateur. En effet, les mesures de temps peuvent être faites point par point sur l'écran de l'oscilloscope. Le début du diagramme de bifurcations (partie 3.1) peut être obtenu de cette façon.

En se limitant toujours aux mesures de temps, l'interface parallèle dont disposent tous les micro-ordinateurs (communication avec l'imprimante) permet de disposer d'une ligne d'entrée numérique (indication de fin de papier). Moyennant une mise en forme du signal de la céramique, il est possible de mesurer avec cette entrée unique l'écart entre chocs successifs. On peut alors obtenir une représentation de l'attracteur en portant l'écart $t_{n+1} - t_n$ en fonction de $t_n - t_{n-1}$ (voir références [1-3]).

3. LE CHAOS

Lorsqu'on pense au système dans l'abstrait, on imagine en général que la bille va rebondir régulièrement une fois par période lorsque le plateau remonte, comme une balle que l'on fait rebondir sur une raquette. Ce régime de fonctionnement est effectivement obtenu dans certaines conditions, mais si l'amplitude du mouvement du plateau (A_0) est trop grande, le mouvement de la bille peut devenir complètement désordonné.

3.1. Transition vers le chaos, la cascade de bifurcations

Pour étudier la façon dont le système va passer du régime de fonctionnement simple au régime chaotique, nous allons suivre l'évolution de l'une des grandeurs caractérisant le choc. l'instant du choc (la phase), τ_n avec l'amplitude d'excitation A_0 . Si la fréquence est

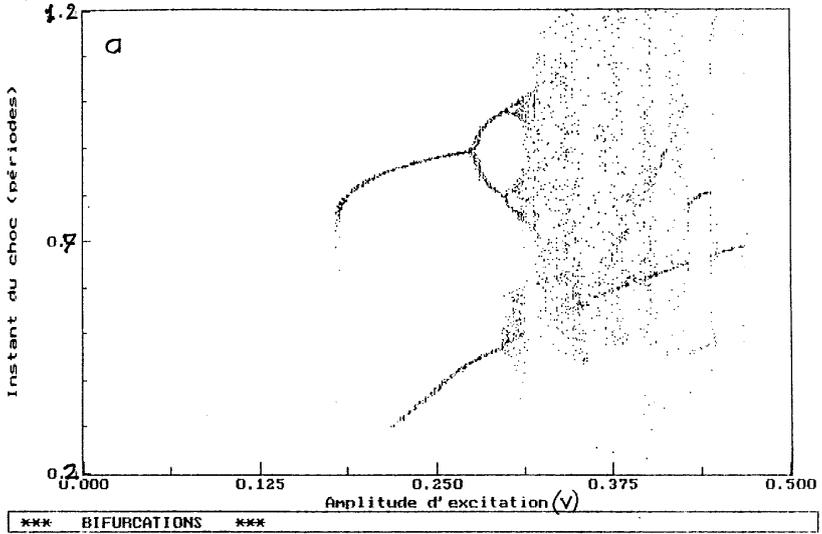
maintenue constante, cette amplitude, réglable par la tension envoyée sur le vibreur, est le seul paramètre qui détermine le régime de fonctionnement, c'est ce qu'on appelle le paramètre de contrôle.

La figure 3 présente les résultats de cette étude. résultats expérimentaux (3a) et résultats du calcul (3b). Nous ne nous intéresserons pas, pour l'instant à la partie inférieure de ces figures ($\tau/T < 0.6$) qui sera étudiée dans la section 5. En ce qui concerne la branche supérieure, la partie gauche, pour des valeurs expérimentales de A_0 comprises entre 0.18 et 0.27 V (0.27 et 0.40 mm par le calcul), correspond au régime du rebond simple : pour une valeur donnée de A_0 , le choc a lieu toujours au même instant τ_n . Les trajectoires de la bille et du plateau, calculées pour une valeur de A_0 de 0.38 mm, sont représentées sur la figure 4a. Le mouvement de la bille est périodique, avec la même période que l'excitation. Au dessous d'une amplitude critique A_c (0.18 V ou 0.27 mm), le mouvement du plateau n'est plus suffisant pour entretenir les rebonds et la bille retombe..

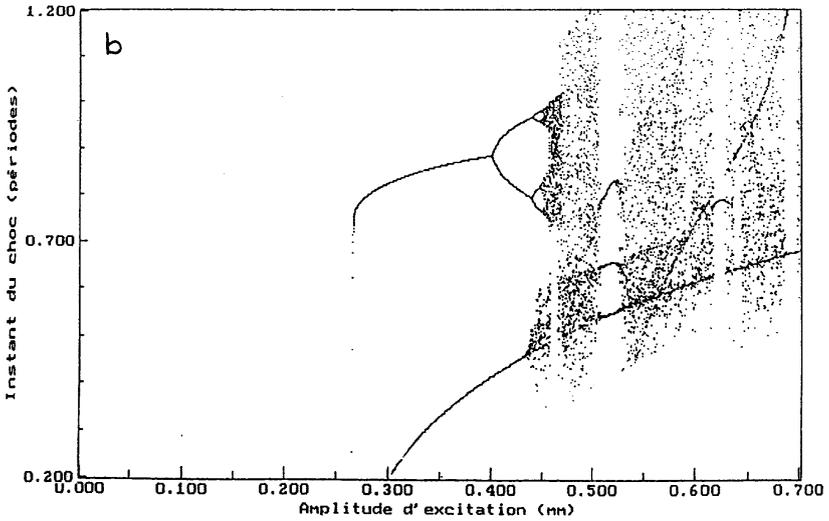
Plus intéressante est la limite de ce régime dans l'autre sens : au delà de 0.27 V (0.40 mm), deux instants d'impacts différents apparaissent. L'analyse des trajectoires calculées pour $A_0 = 0.42$ mm (figure 4b) montre que la bille rebondit alternativement, une fois plus haut, une fois plus bas et qu'elle arrive tantôt près du sommet de la sinusoïde, tantôt plus en avance. Le mouvement de la bille reste périodique, mais il faut attendre deux périodes de l'excitation pour retrouver la même trajectoire : c'est le *doublement de période*. Expérimentalement, en dehors de la représentation un peu abstraite de la figure 3, ce changement de régime est observé de façon plus directe : à l'oreille, on constate une modification du rythme des chocs ; sur l'écran de l'oscilloscope, les instants de l'impact sont alternativement décalés par rapport à la sinusoïde de la tension d'alimentation.

Cette transition est réversible : en diminuant l'amplitude, on retrouve le régime périodique simple. Si les variations sont très lentes, le seuil d'apparition et de disparition du doublement de période est tout à fait reproductible. Pour des variations plus rapides, on peut observer un régime transitoire. Ce point sera approfondi dans la section 4.

Lorsque l'amplitude continue à augmenter, un nouveau seuil apparaît, au-delà duquel on obtient quatre points d'impact. Sur la figure 4c, la trajectoire correspondante ($A_0 = 0.444$ mm) ressemble à la précédente, avec de grands sauts et de petits sauts, mais, en regardant de



a - Expérimental.

b - Simulation numérique ($\mu = 0.53$).**Figure 3** : Diagramme de bifurcation.

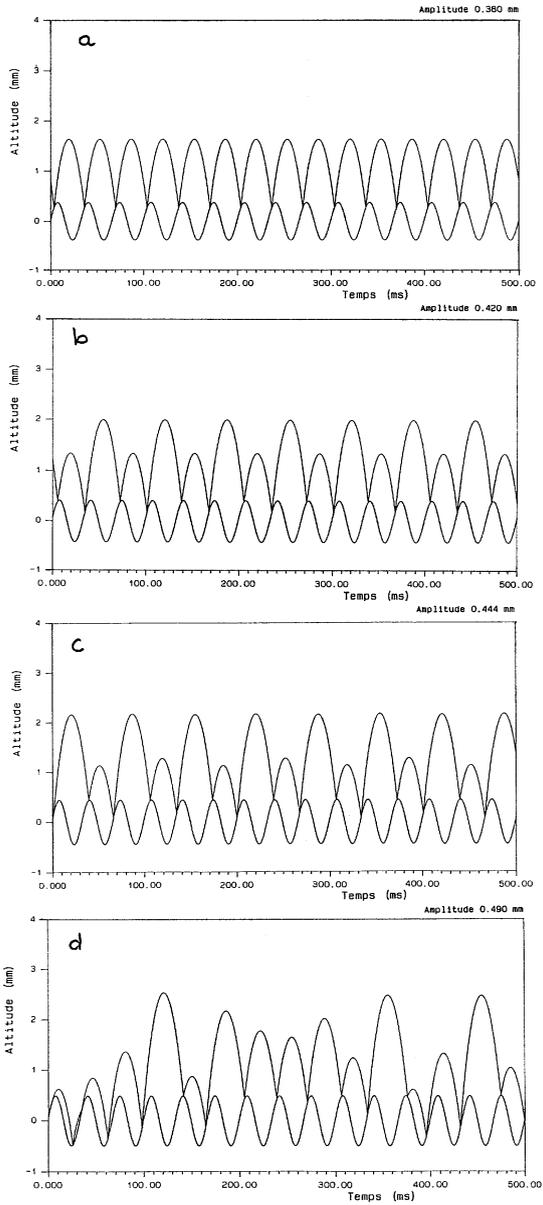


Figure 4 : Trajectoires de la bille et du plateau pour différentes valeurs de l'amplitude A_0 ($\mu = 0.53$).

plus près, on constate que les petits sauts sont eux-même alternative-ment plus grands et plus petits et qu'il faut maintenant attendre quatre périodes pour retrouver le même comportement. Il y a *quadruplement de période*.

Le phénomène continue ensuite : les quatres branches se subdivisent pour donner la période 8 puis 16 et ainsi de suite à l'infini c'est la *cascade de bifurcations*. Expérimentalement, le bruit électronique et la résolution limitée du convertisseur rendent difficile l'observation au delà du quadruplement, mais sur la simulation. on peut suivre la cascade aussi loin que la précision des calculs le permet.

Le point important est que cette cascade de bifurcations a un caractère tout à fait universel. C'est une des façons de passer de l'ordre au chaos que l'on peut retrouver sur des systèmes aussi différents qu'un oscillateur électronique [5], les oscillations acoustiques entretenues dans une clarinette [6] ou la simulation de l'évolution d'une population [2]...

Cette universalité n'est pas seulement qualitative : en appelant A_q le seuil d'apparition de la bifurcation d'ordre q , on peut calculer le rapport :

$$\delta = \frac{A_{q+1} - A_q}{A_q - A_{q-1}}$$

Ce rapport tend vers un nombre $\delta = 1/4.6692016\dots$, aussi universel que π ou e , indépendant du système physique (ou purement mathématique) étudié.

3.2 Le régime chaotique, l'attracteur étrange

La cascade de bifurcation est donc en principe infinie, mais la suite A_q des valeurs critiques du paramètre de contrôle converge vers une valeur finie A_∞ . Pour une valeur de A_0 supérieure à A_∞ , on entre dans le régime chaotique. Le mouvement de la bille devient complètement désordonné. Le calcul des trajectoires montre une succession de sauts irréguliers (figure 4d).

Pour étudier ce régime, la représentation adoptée pour le diagramme de bifurcations n'est plus adaptée puisque, pour une valeur de A_0 , on ne voit plus qu'une succession de points sur une verticale, qui finissent par couvrir peu à peu toute la ligne. On va donc porter, pour une amplitude donnée, deux grandeurs caractérisant le choc: toujours l'ins-

tant τ_n , mais cette fois en fonction de l'intensité du choc I_n . I_n est l'amplitude de l'impulsion électrique sur la céramique pour le diagramme expérimental, la différence des vitesses $v_{in} - v_{fn}$ pour le calcul. En termes savants cette représentation est une *section de Poincaré de l'espace des phases* (voir annexe 1).

Pour le régime périodique simple, cette section se réduit à un point (figure 5a), les valeurs de τ_n et I_n étant identiques à chaque choc. Pour le doublement et le quadruplement, on obtient deux, puis quatre points (figure 5b, c), on peut suivre ainsi la cascade de bifurcations.

Lorsque le régime est chaotique, on voit apparaître progressivement un nuage de points (figure 5d). Alors que, pour une valeur fixée de A_0 dans la cascade de bifurcations le nombre de points était fixe, ici, tant que l'on n'est pas limité par la résolution de l'affichage, de nouveaux points apparaissent sans cesse, chaque impact ayant des caractéristiques différentes de tous les précédents. Ce nuage de points n'est pourtant pas quelconque, il reste limité dans une région du plan et possède un certain nombre de propriétés caractéristiques. Ce nuage est une section de Poincaré de *l'attracteur étrange*. La figure 6 montre l'attracteur obtenu expérimentalement. On constate là encore que l'accord est bon, tant pour la forme générale que pour les détails. L'attracteur expérimental est cependant un peu plus étalé.

Sur les figures 5d et 6 apparaît l'aspect feuilleté qui est une des caractéristiques de l'attracteur étrange. Cette caractéristique s'accompagne d'une propriété curieuse : à n'importe quelle échelle d'observation l'attracteur conserve la même structure, chaque branche se divisant en deux à l'infini, c'est l'*autosimilarité*. Cette propriété apparaît nettement sur la figure 7, caculée, qui n'est pas entachée du bruit expérimental. D'autres propriétés intéressantes, comme la dimension fractionnaire liée à la nature fractale peuvent être étudiées, on se reportera pour cela aux références [1-3].

3.3. Le cœur du problème : déterminisme et imprédictibilité

Les aspects mathématiques inhabituels rencontrés dans l'étude de l'attracteur étrange intéresseront surtout le scientifique. Cependant, un autre point qui peut être abordé avec ce système a une portée beaucoup plus générale puisqu'il s'agit du problème du déterminisme.

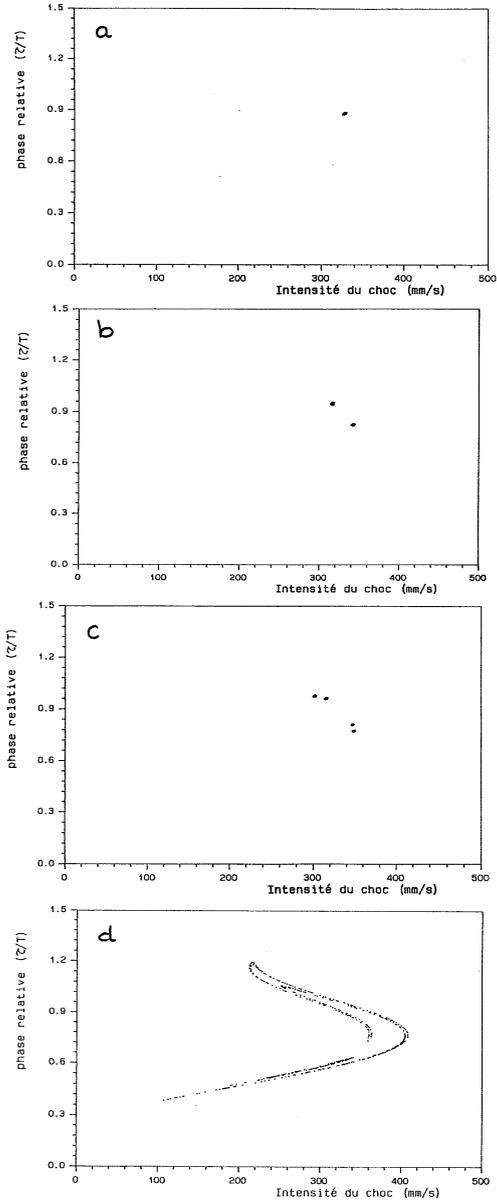


Figure 5 : Sections de Poincaré des trajectoires de la figure 4. Les points ont été grossi pour les sections a, b et c ($\mu = 0.53$).

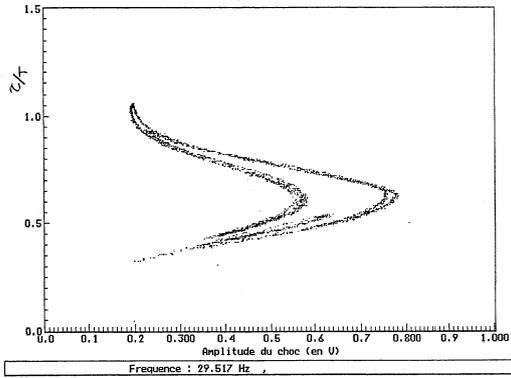


Figure 6 : Sections de Poincaré de l'attracteur étrange, résultat expérimental.

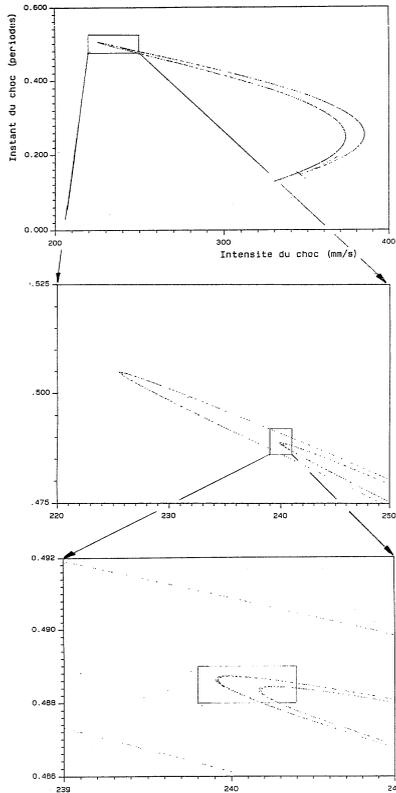


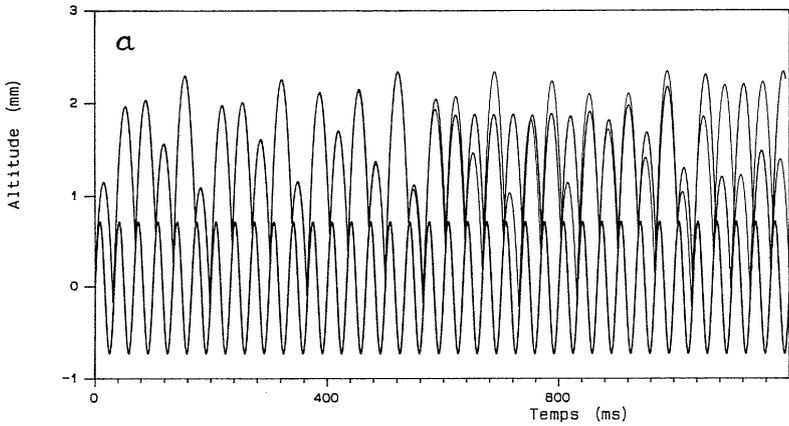
Figure 7 : Agrandissements successifs d'une section de l'attracteur étrange. Simulation numérique ($\mu = 0.25$, $Ao = 0.73$ mm).

La question est de savoir si, à partir de mesures effectuées à un instant donné, il est possible de prédire le comportement de la bille à n'importe quel instant dans l'avenir. En théorie, la réponse semble être oui. De fait, au niveau du calcul, pour des conditions initiales (vitesse et position de la bille) fixées à un instant donné, la trajectoire est entièrement déterminée. Le système est bien *déterministe*. Mais avec quelle précision peut-on fixer les conditions initiales ? La figure 8a montre la comparaison de deux trajectoires en régime chaotique, commencées apparemment dans les mêmes conditions, mais avec un écart relatif de 10^{-5} sur les vitesses initiales. Pendant une quinzaine de rebonds, les trajectoires sont confondues, puis elles se séparent très rapidement et n'ont plus rien en commun après une vingtaine de rebonds. Si l'écart initial avait été plus faible, les trajectoires auraient été confondues un peu plus longtemps mais le résultat final aurait été le même, on constate là la *sensibilité aux conditions initiales*.

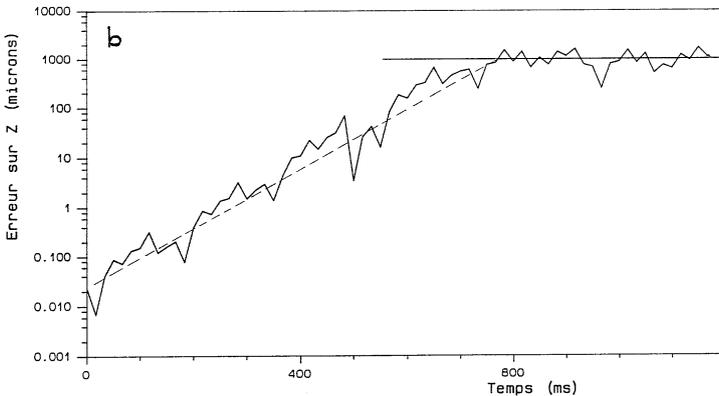
Le problème apparaît plus nettement encore sur la figure 8b où l'on a porté, en ordonnées logarithmiques, l'écart sur l'altitude à l'instant du choc. L'écart initial, d'une fraction de micron, croît inexorablement avec le temps. L'obtention d'une droite sur la première partie de la figure montre que la divergence des trajectoires est une *divergence exponentielle* ce qui est aussi une caractéristique générale des systèmes chaotiques. La croissance s'arrête seulement lorsque l'écart devient de l'ordre du mm, c'est à dire de l'ordre de grandeur du mouvement de la bille.

Ainsi, à une précision donnée sur les conditions initiales, correspond un *horizon de prédictibilité*, temps au delà duquel l'incertitude sur la prédiction du mouvement devient de l'ordre de grandeur du mouvement lui-même. Pour repousser plus loin cet horizon, il faut connaître avec une précision plus grande les conditions initiales. Mais, celles-ci ne pouvant être précisées au-delà de l'échelle atomique et des limitations de la mécanique quantique (principe d'incertitude), l'horizon de prédiction sera toujours limité.

Pour illustrer ce phénomène de sensibilité aux conditions initiales dans la vie courante, on prend souvent l'exemple des prévisions météorologiques : les progrès dans le nombre de jours de prévision suivent les progrès dans la précision et surtout le nombre de points de mesures atmosphériques sur l'ensemble du globe. Mais, dans ce cas, le problème étant beaucoup plus complexe, la limitation tient aussi au volume du



a - Deux trajectoires débutant avec un écart relatif $\Delta v_i/v_i$ de 10^{-5} .



b - Écart en z au moment des chocs pour ces deux trajectoires.

Figure 8 : Sensibilité aux conditions initiales.

calcul nécessaire. Le cas de la bille fait mieux apparaître le caractère fondamental de l'imprédictibilité à long terme.

3.4. Fenêtres d'ordre dans le chaos

On peut remarquer sur la figure 3 que dans la zone correspondant aux régimes chaotiques l'accord expérience-simulation est moins bon. Comme on vient de le voir, le comportement de la bille est alors très

sensible aux faibles perturbations. Les imperfections de l'expérience ont donc une influence plus grande. Un point critique à ce point de vue est la stabilité en amplitude du générateur.

Malgré ce brouillage, la figure 3a laisse cependant entrevoir une particularité, plus apparente sur la figure 3b : au cœur de la zone chaotique, une certaine régularité se manifeste par l'apparition de traits sous-jacents au nuage de points. Sur les attracteurs, cette régularité se traduit par des accumulations de points : certains types de chocs sont beaucoup plus fréquents que les autres. Le point surprenant est que, pour certains domaines de valeurs du paramètre de contrôle, on obtient à nouveau un régime strictement périodique, centré sur ces points d'accumulation. On peut observer une telle *fenêtre d'ordre* pour les valeurs de A_0 autour de 0.52mm. La zone correspondante est brouillée dans le diagramme expérimental mais la régularité s'entend très bien à l'oreille. Une deuxième fenêtre apparaît, cette fois dans les deux diagrammes, pour $A_0 \sim 0.44$ V (0.62 mm).

L'existence de fenêtres d'ordre dans le chaos est encore un phénomène assez général, commun à tous les systèmes non-linéaires. Cependant, ces fenêtres sont généralement très étroites et difficilement visibles. L'existence, ici, d'une grande plage de variation du paramètre de contrôle peut s'expliquer en observant la trajectoire. La figure 9 représente cette trajectoire en régime permanent, calculée pour une valeur de A_0 de 0.515 mm. La période de base du mouvement est $5T$. Le point important est que, après le saut le plus élevé, la bille tombant sur le plateau au moment où celui-ci descend, les rebonds suivants sont amortis très vite et la bille finit par rester sur le plateau, en suivant le mouvement de celui-ci. Après un nouveau décollage, ayant perdu la mémoire des rebonds antérieurs, la trajectoire recommence avec des conditions initiales identiques.

Dans le cas général, la fenêtre d'ordre retourne au régime chaotique par la même cascade de bifurcations sous-harmoniques. Ici, en étudiant en détail la zone concernée, on peut effectivement mettre en évidence un doublement de période pour $A_0 = 0.52365$ mm.

4. ANALYSE DE STABILITÉ, RÉGIMES TRANSITOIRES

En dehors de l'étude expérimentale et du calcul purement numérique, une autre façon d'aborder le système est de chercher, directement

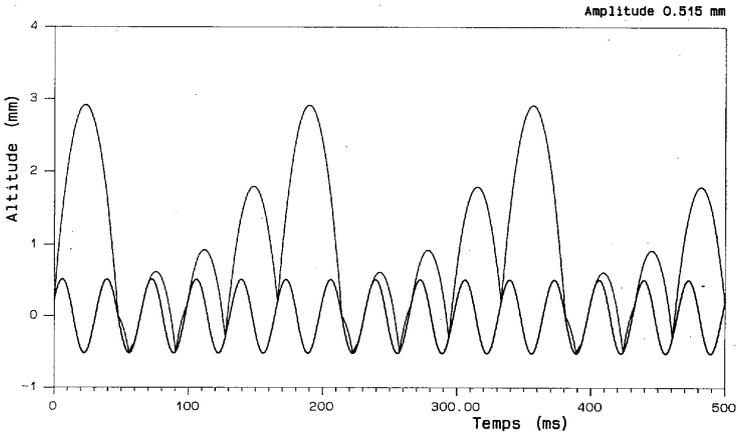


Figure 9 : Trajectoire de période $5T$ correspondant à une fenêtre d'ordre dans le chaos ($\mu = 0.53$, $A = 0.515$ mm).

à partir des équations du mouvement, quels sont les régimes de fonctionnements possibles et quels sont les critères de stabilité de ces régimes.

4.1. Recherche des régimes périodiques

Le mouvement vertical du plateau. $Z(t) = A_0 \cos(\omega t)$, fixe le repère temporel. Dans le cas d'un régime de rebond périodique, les conditions initiales de la trajectoire libre de la bille sont les mêmes après chaque choc. En particulier, la hauteur du plateau $Z_n = Z(\tau_n)$ étant invariante, la vitesse finale v_{fn} doit être l'opposée de la vitesse initiale :

$$v_{in} = -v_{fn} = v_P = gT/2 \quad \{2\}$$

g étant l'accélération de la pesanteur et $T = 2\pi/\omega$ la période de vibration, l'indice P caractérisant les grandeurs en régime périodique. Cette équation, combinée à l'équation du choc {1}, donne une condition sur la vitesse du plateau à l'instant t_n :

$$V(t_n) = v_P \frac{1-\mu}{1+\mu} \quad \{3\}$$

Ceci impose une relation entre A_0 et τ_p , τ_p étant la phase commune à tous les chocs :

$$A_0 \omega \cdot \sin(\omega\tau_p) = -v_p \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} = -\frac{gT}{2} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \quad \{4\}$$

ce qui, en introduisant l'amplitude critique $A_c = \frac{gT}{2\omega} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu}$ s'écrit :

$$A_0 = -A_c / \sin(\omega\tau_p) \quad \{5\}$$

La courbe correspondant à cette relation est tracée sur la figure 10, superposée au diagramme de bifurcations calculé pour les mêmes valeurs de μ et de la période T. Cette courbe décrit bien l'ensemble du régime de période simple, mais elle se poursuit au delà par des branches qui ne sont pas observées, ni expérimentalement, ni dans les résultats du calcul numérique. Il faut donc rechercher dans les critères de stabilité pourquoi ces branches ne sont pas obtenues.

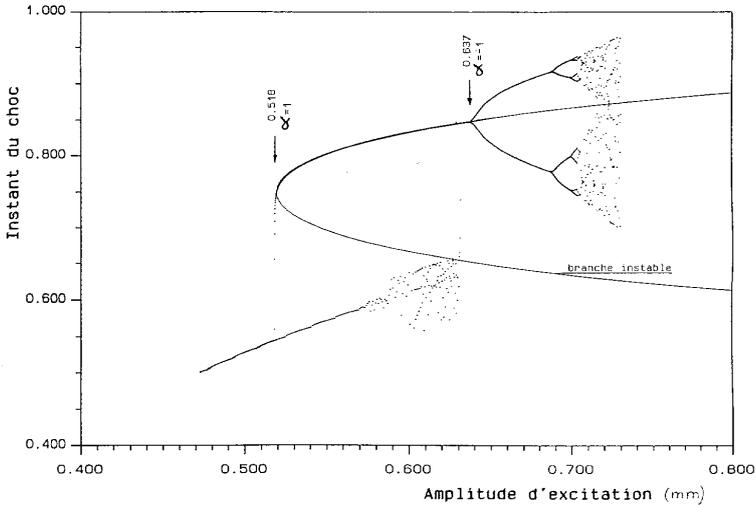


Figure 10 : Analyse de stabilité : courbe des régimes périodiques ($\mu = 0.25$).

Avant de passer à cette analyse, il faut remarquer que, dans l'équation {2}, on a considéré que la durée du vol libre de la bille était égale à la période de la table T. D'autres régimes périodiques

simples sont possibles pour lesquels cette durée est un multiple de T . L'équation {2} devient alors, m étant un nombre entier:

$$v_{in} = -v_{fn} = v_{Pm} = m \cdot gT/2 \quad \{6\}$$

On obtient ainsi toute une famille de courbes. La portion stable de la courbe $m = 2$ est effectivement observée, expérimentalement et dans la simulation. Elle se termine par la même cascade de bifurcation. Ce régime, pour lequel la période du mouvement de la bille est double de celle du mouvement de la table, ne doit cependant pas être confondu avec le régime issu de la première bifurcation décrit plus haut.

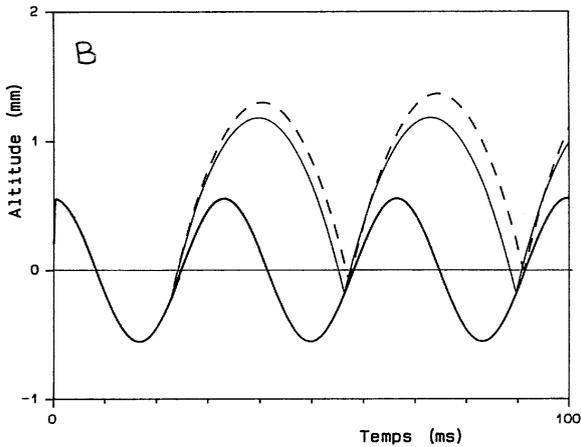
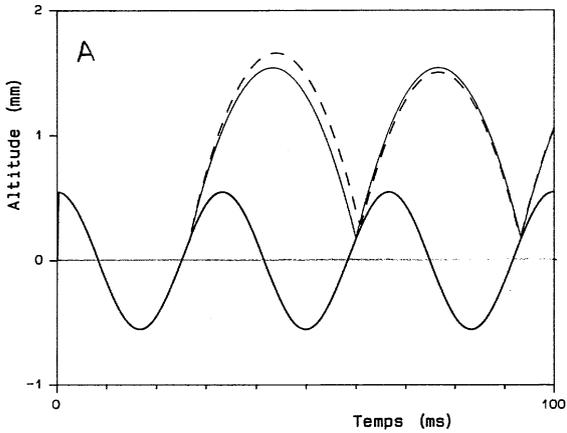
4.2. Étude qualitative de la stabilité

Pour comprendre l'analyse de la stabilité du cycle, on peut raisonner sur un analogue mécanique : une bille au fond d'une sphère creuse est en équilibre, une bille posée sur le sommet d'une sphère est théoriquement en équilibre aussi, mais cette position instable n'a aucune chance d'être observée dans des conditions normales. En effet, dans ce cas, un petit déplacement dû à une perturbation a tendance à être amplifié, alors que dans le premier cas il est source d'une force de rappel vers l'équilibre.

De la même façon, ici, il faut étudier comment une petite perturbation de la trajectoire correspondant au régime périodique est amplifiée ou atténuée. Pour cela, on peut se contenter de prendre un échantillon de la trajectoire à chaque période, c'est à dire de regarder ce qui se passe au moment du choc.

On peut voir, sur la figure 11, à quoi correspondent les deux branches de la courbe des régimes périodiques. La périodicité impose simplement une condition sur la vitesse ascensionnelle du plateau au moment du choc (équation {3}), mais la même vitesse peut être obtenue pour deux valeurs de τ : τ_p (trajectoire A), et $3T/2 - \tau_p$ (trajectoire B). Dans le cas de la trajectoire A, si, à la suite d'une perturbation, la vitesse initiale après le choc, v_{in} , est un peu trop forte, la bille retombera plus tard, à un moment où la vitesse du plateau est plus faible, ce qui aura tendance à corriger l'écart. Dans le cas de la trajectoire B au contraire, la vitesse du plateau au choc suivant sera plus grande et l'écart aura tendance à augmenter : le régime est instable. Le même raisonnement amène une conclusion identique dans le cas où la perturbation correspond à une diminution de v_{in} . L'amplitude critique

est celle pour laquelle la vitesse nécessaire à l'entretien du rebond est la vitesse maximum du plateau pour $\tau_p = 3T/4$.



- Trajectoire périodique
 - - - Trajectoire commencée avec un écart initial δv_i

Figure 11 : Comparaison des trajectoires stables (A) et instables (B).

Toujours qualitativement, on peut comprendre pourquoi il y a doublement de période. Au delà d'une certaine valeur de A_0 , l'effet de correction devient trop grand et, au lieu d'un retour vers le régime

périodique simple, on obtient oscillation de part et d'autre de celui-ci. Mais ce raisonnement ne permet pas de déterminer pour quelle valeur de A_0 la bifurcation se produit.

4.3. Analyse de stabilité linéaire

Pour cette analyse, nous allons encore utiliser une section de Poincaré de la trajectoire, mais ici, l'intensité du choc sera remplacée par la vitesse initiale après le choc v_i . Pour travailler avec des unités homogènes, on exprimera cette vitesse par la grandeur $u_i = v_i / g$ ayant la dimension d'un temps.

Dans le plan τ - u_i , un point (τ_n, u_{in}) correspond à un choc. Pour simplifier les notations, on représentera ce point par le vecteur associé \vec{W}_n , de composantes τ_n, u_{in} . Les équations du mouvement de la bille et du rebond se résument alors, pour une valeur déterminée des paramètres ω, μ et du paramètre de contrôle A_0 , à une application qui fait correspondre au vecteur $\vec{W}_n(\tau_n, u_{in})$ le vecteur $\vec{W}_{n+1}(\tau_{n+1}, u_{in+1})$:

$$\vec{W}_{n+1} = \mathcal{F}(\vec{W}_n) \quad \{7\}$$

Un régime périodique simple est possible pour les vecteurs \vec{W}_p qui sont inchangés dans cette application, et donc solutions de :

$$\vec{W}_p = \mathcal{F}(\vec{W}_p) \quad \{8\}$$

On retrouve ici, de façon plus formelle, les résultats du paragraphe 5.1. : les composantes des vecteurs \vec{W}_p sont en fait données par les équations {2} et {4}, mais ce formalisme va nous permettre d'aborder plus simplement le critère de stabilité.

Supposons qu'au choc N, le vecteur \vec{W}_n diffère de $\delta\vec{W}_n$ du vecteur \vec{W}_p , le vecteur caractérisant le choc suivant \vec{W}_{n+1} différera de $\delta\vec{W}_{n+1}$. Le régime sera stable si, en l'absence de perturbation ultérieure, les écarts successifs $\delta\vec{W}_{n+1}, \delta\vec{W}_{n+2} \dots$ tendent vers 0, il sera instable si cet écart s'amplifie.

Comme on s'intéresse aux écarts faibles autour de \vec{W}_p , l'application \mathcal{F} peut être linéarisée autour de ce point. Le vecteur $\delta\vec{W}_{n+1}$ s'obtient alors en faisant simplement le produit de $\delta\vec{W}_n$ par une matrice [F].

$$\delta\vec{W}_{n+1} = [F] \cdot \delta\vec{W}_n \quad \{9\}$$

Cette méthode s'appelle *l'analyse de stabilité linéaire*, la matrice [F] est une *matrice de Floquet*. Le régime sera stable tant que les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice de Floquet auront un module inférieur à 1, le module de $\delta\vec{W}_{n+1}$ étant alors inférieur au module de $\delta\vec{W}_n$. Les valeurs critiques du paramètre de contrôle seront celles pour lesquelles le module de l'une des valeurs propres devient supérieur à 1. Dans le cas qui nous intéresse, pour le régime de période T, l'équation {9} s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \delta\tau_{n+1} \\ \delta u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mu \\ \pi(1 - \mu) \cdot \cotg(\omega\tau_p) & \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \cdot \cotg(\omega\tau_p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\tau_n \\ \delta u_n \end{pmatrix} \quad \{10\}$$

L'équation aux valeurs propres correspondante est :

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \left[1 + \mu^2 + \pi(1 - \mu^2) \cdot \cotg(\omega\tau_p) \right] + \mu^2 = 0 \quad \{11\}$$

Le paramètre de contrôle A_0 semble avoir disparu de ces relations, mais il est en fait lié à τ_p (pour $T/2 < \tau_p < T$) par la relation {5} exprimant la condition de périodicité.

L'analyse des solutions de l'équation {11} montre tout d'abord que, pour $\cotg(\omega\tau_p) > 0$ ($T/2 < \tau_p < 3T/4$), une des valeurs propres est toujours supérieure à 1. La branche inférieure est donc bien instable. La limite de stabilité $\lambda = 1$ est obtenue pour $\tau_p = 3T/4$ correspondant à l'amplitude critique A_c .

Dans l'autre sens, la valeur propre $\lambda = -1$ est obtenue pour

$$\cotg(\omega\tau_2) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} \quad \{12\}$$

d'où l'on peut déduire l'amplitude correspondant au seuil de doublement de période:

$$A_2 = -A_c / \sin(\omega\tau_2) \quad \{13\}$$

Les relations {12} et {13} montrent que le rapport A_2/A_c ne dépend que de μ . Ce rapport permet donc une détermination expérimentale de ce paramètre sans connaître le coefficient de proportionnalité entre la tension d'alimentation et l'amplitude de vibration. La valeur trouvée, $\mu = 0.53$, est en accord avec la détermination directe par la méthode exposée plus haut. C'est cette valeur qui a été utilisée dans le calcul des figures 3 et 5.

Il serait possible de continuer et d'étudier la stabilité du régime de période 2. Les vecteurs \vec{W}_2 caractéristiques de ce régime sont ceux qui sont inchangés dans l'application $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$. Les valeurs propres de la matrice $[F_2]$ linéarisant cette application autour de \vec{W}_2 permettent de déterminer les portions stables ou instables de ce régime. Mais les calculs deviennent beaucoup plus complexes. En effet la matrice $[F_2]$ n'est pas le simple produit $[F] \cdot [F]$ mais le produit des matrices de linéarisation autour des deux vecteurs \vec{W}_2 . On peut remarquer cependant qu'au point de bifurcation, on a $[F_2] = [F] \cdot [F]$ et donc qu'une valeur propre de $[F_2]$ est égale à $(-1)^2 = 1$.

4.4 Vecteurs propres, transitoires

Ayant déterminé les valeurs critiques du paramètre de contrôle correspondant aux changements de régimes, on peut s'intéresser maintenant à ce qui se passe au voisinage de ces changements.

On notera α et β les deux valeurs propres réelles de la matrice de Floquet*, \vec{w}_α et \vec{w}_β , les vecteurs propres correspondants. Si α est la valeur propre dont le module est égal à 1 au changement de régime, le module de l'autre valeur propre, β , sera voisin de μ^2 d'après l'équation {11}.

* Vers le milieu de la zone de stabilité, la matrice de Floquet n'a pas de valeurs propres réelles. On montre cependant dans ce cas que le régime est stable si le module des deux valeurs propres reste inférieur à 1 (voir référence 1 Annexe).

Un vecteur d'écart quelconque $\delta\vec{W}_n$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de \vec{w}_α et \vec{w}_β :

$$\delta\vec{W}_n = a \cdot \vec{w}_\alpha + b \cdot \vec{w}_\beta$$

au choc suivant, on aura :

$$\delta\vec{W}_{n+1} = a \cdot \alpha \cdot \vec{w}_\alpha + b \cdot \beta \cdot \vec{w}_\beta$$

puis, après m chocs :

$$\delta\vec{W}_{n+m} = a \cdot \alpha^m \cdot \vec{w}_\alpha + b \cdot \beta^m \cdot \vec{w}_\beta$$

La composante selon \vec{w}_β . diminue très vite, comme μ^{2m} . L'approche ou le départ d'un régime se feront toujours le long du vecteur propre \vec{w}_α .

Si l'on s'intéresse à la première bifurcation, on peut poser $\alpha = -(1 + \varepsilon)$. Un écart initial au régime périodique simple grandira comme $[-(1 + \varepsilon)]^m$. Un exemple est donné sur la figure 12 : à partir d'un point A, situé sur la courbe du régime périodique simple, un écart, selon v_i au départ, croît le long \vec{w}_α pour aller rejoindre le régime de période 2 (points D, D'). On peut vérifier sur la figure que la pente de la droite correspond bien aux composantes de \vec{w}_α données par {10} en unités réduites : $2 + \varepsilon$ et $-(1 + \mu)$. On peut voir de la même façon qu'à partir du point B, pour A_0 légèrement inférieur à A_c ($a = 1 + \varepsilon$), le départ se fait selon la direction $(1, 0)$.

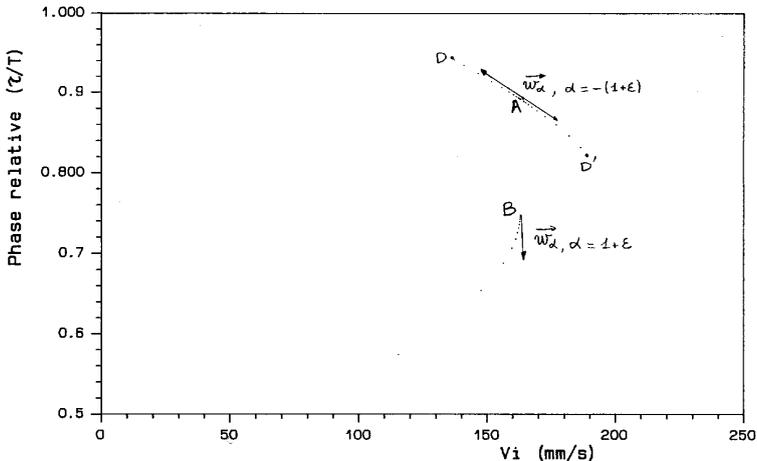


Figure 12 : Régimes transitoires et vecteurs propres dans le plan τ, v_i .

On peut expliquer ainsi le mécanisme de *retard à la bifurcation*. Lorsque l'amplitude A_0 franchit la valeur A_2 par valeurs croissantes, le système reste un moment en régime périodique simple. En effet, ε étant petit juste après la transition, l'écart à ce régime, en $[-(1 + \varepsilon)]^m$, n'augmente que lentement. Inversement, lorsqu'on franchit le seuil par valeurs décroissantes, l'approche du régime périodique ne se fait que comme $[-(1 - \varepsilon)]^m$, qui tend vers 0 d'autant plus lentement que A_0 est proche de A_2 . La bifurcation, au lieu d'une allure parabolique, prend alors un aspect pointu. Ceci est particulièrement visible sur la figure 13.

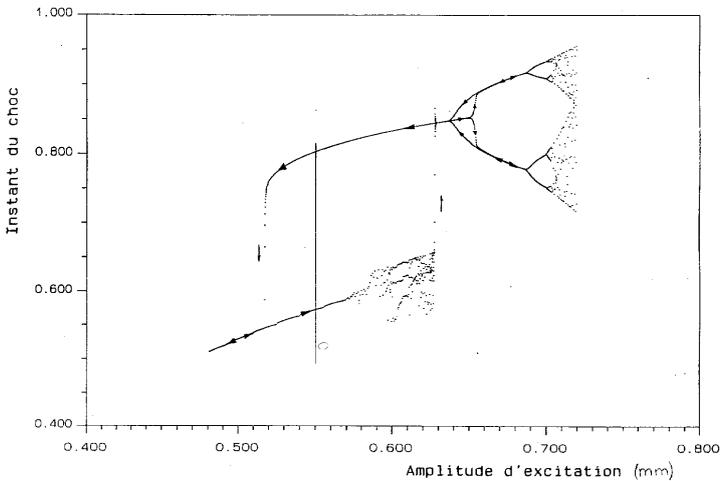


Figure 13 : Bistabilité et hystérésis. Les flèches indiquent le sens de parcours ($\mu = 0.25$).

5. BISTABILITÉ, BASSINS D'ATTRACTION

5.1. Le régime décollage-atterrissage

Jusque là, dans un but de simplification, nous n'avons pas étudié la branche inférieure des diagrammes de bifurcations. Expérimentalement, c'est pourtant le régime correspondant à cette branche qui apparaît en premier. Lorsque, la bille étant posée sur le plateau immobile, on augmente progressivement l'amplitude de vibration, la bille suit tout d'abord le mouvement. A partir d'un certain seuil, lorsque l'accélération du plateau à son point haut ($-A_0\omega^2$) devient supérieure à g , on entre

dans un régime de décollage-atterrissage : la bille décolle, puis retombe et, après éventuellement un certain nombre de rebonds de hauteur décroissante, accompagne à nouveau le mouvement du plateau jusqu'au prochain décollage. On a donc encore un mouvement périodique, ayant la périodicité de l'excitation, ce qui se traduit par une ligne sur le diagramme de bifurcation.

Lorsque l'amplitude continue à augmenter, le régime devient irrégulier. La bille retombant plus tard et d'une plus grande hauteur, les rebonds suivant le premier choc n'ont plus le temps de s'atténuer et la bille ne suit plus vraiment le mouvement du plateau à l'instant qui correspondrait au décollage. On retrouve l'analyse faite à propos de l'étude de la fenêtre d'ordre dans le chaos (section 3.4) : l'ordre provient de la perte de mémoire des rebonds précédents pendant que la bille est collée sur le plateau. Un point intéressant serait de voir si ce régime irrégulier est bien un régime chaotique, caractérisé par un attracteur étrange avec toutes ses propriétés..., ou s'il s'agit seulement d'un régime périodique ayant une périodicité très longue. La façon dont il apparaît est en tout cas assez inhabituelle.

5.2. Bistabilité, hystérésis

La figure 13 a été calculée, pour une valeur $\mu = 0.25$ du coefficient de restitution, avec une vitesse de variation du paramètre de contrôle A_0 constante, d'abord en augmentant, jusqu'à 0.72 mm, puis en diminuant. Le point représentatif du système décrit d'abord la branche du bas, régime périodique, puis régime irrégulier. Pour une valeur déterminée de A_0 , il y a alors un saut brusque sur la branche correspondant au régime périodique de rebond. On peut noter au passage le comportement transitoire à l'arrivée dans ce régime (écart en $[-(1 - \epsilon)]^m$). En continuant, on observe la première bifurcation, avec le phénomène de retard décrit précédemment, puis le passage au régime chaotique. En revenant en arrière, après la dernière bifurcation, le régime reste le régime de rebond de période T jusqu'à l'amplitude critique A_c en dessous de laquelle la bille retombe dans le régime de décollage-atterrissage.

Il existe ainsi toute une plage de valeurs du paramètre de contrôle pour lesquelles deux régimes de fonctionnement différents peuvent être obtenus. Le système est bistable ; son fonctionnement dépend non seulement de la valeur de A_0 mais aussi de la façon dont on a établi cette valeur. On a un phénomène d'hystérésis. Sur la figure 10, qui donne une vue d'ensemble des états du système, on voit apparaître,

avec la branche instable rejoignant les deux branches stables, la courbe en S caractéristique des systèmes bistables.

La valeur $\mu = 0.25$ a été choisie pour le tracé de la figure 13 car, le basculement vers le haut aboutissant au régime périodique, le cycle d'hystérésis est plus simple. Pour la valeur expérimentale $\mu = 0.53$ (figure 3), le basculement conduit directement au régime chaotique et il faut revenir en arrière pour observer la cascade de bifurcations.

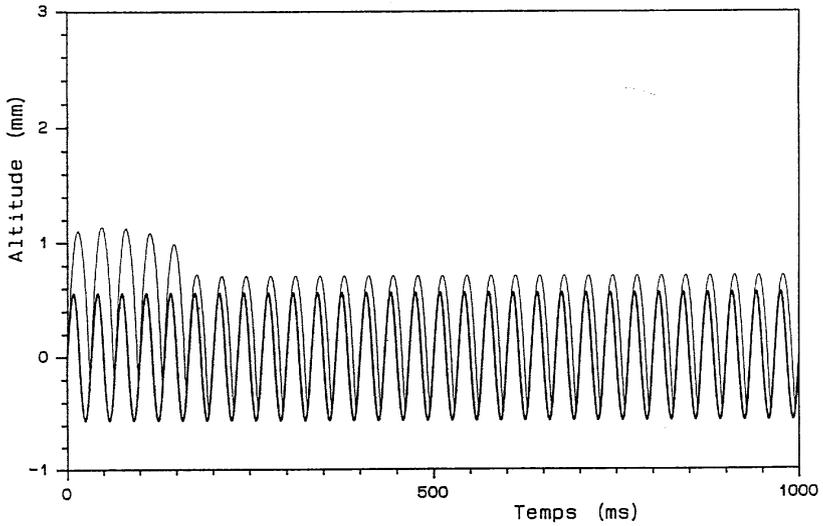
5.3. Bassins d'attraction

Pour une valeur fixée du paramètre de contrôle dans la zone de bistabilité, la bille, lâchée avec des conditions initiales quelconques, finira toujours, après un transitoire plus ou moins long, dans l'un ou l'autre des régimes. La figure 14 montre l'exemple de deux trajectoires, commencées avec la même phase $\tau_1 = 3T/4$, la bille étant sur le plateau, mais avec deux vitesses initiales v_{i1} différentes.

On peut ainsi séparer l'espace des phases en deux *bassins d'attraction* correspondant chacun à l'ensemble des points pour lesquels l'évolution aboutit à un des deux régimes. Pour se ramener à une représentation à deux dimensions de ces bassins, on peut faire à nouveau une section de Poincaré de l'espace des phases. Comme pour l'attracteur, on choisit de faire la coupe au moment du choc pour obtenir une représentation dans le plan $v_i - \tau$. Mais, pour tenir compte du caractère périodique de l'excitation, comme expliqué en annexe, on utilise les coordonnées polaires : la vitesse initiale après le choc, v_i est portée dans la direction définie par l'angle $\omega\tau$.

Un point du plan $(v_i, \omega\tau)$ définit donc les conditions initiales pour une trajectoire, la hauteur initiale étant celle du plateau à l'instant τ . Pour tracer les limites des bassins, il suffit alors, pour tous les points du plan, de déterminer quel est le régime final auquel on aboutit et de classer le point dans un bassin ou dans l'autre. Mais la méthode retenue pour le calcul de la figure 15 est un peu différente. A partir d'un point $(v_i, \omega\tau)$ pris au hasard dans le plan, on suit l'évolution en gardant en mémoire les points intermédiaires, et l'ensemble des points est porté sur le bassin correspondant à l'état d'arrivée. Cette méthode permet d'accélérer le calcul, plusieurs points étant trouvés pour une même trajectoire, mais surtout elle donne une indication sur les chemins les plus fréquemment empruntés pour parvenir au régime stable. La densité des points représentatifs permet ainsi d'avoir une idée de la "profondeur" dans le bassin.

Vi: 147 mm/s; Amplitude: 0.56 mm



Vi: 148 mm/s; Amplitude: 0.56 mm

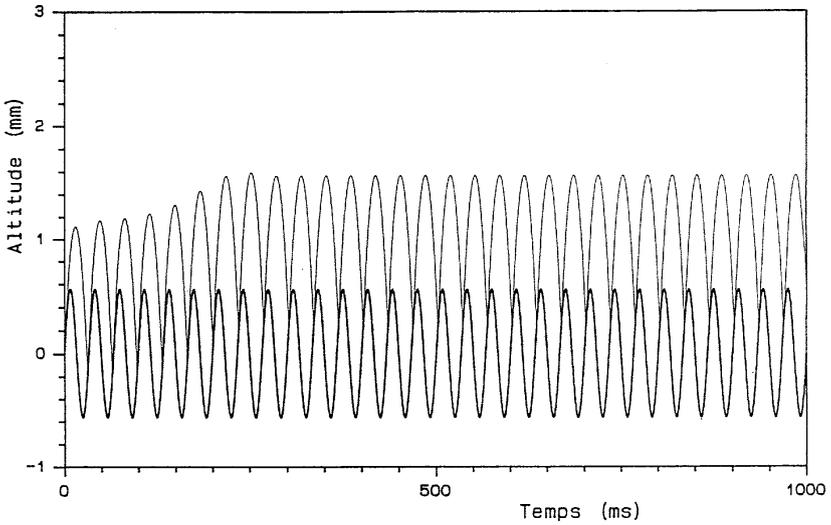
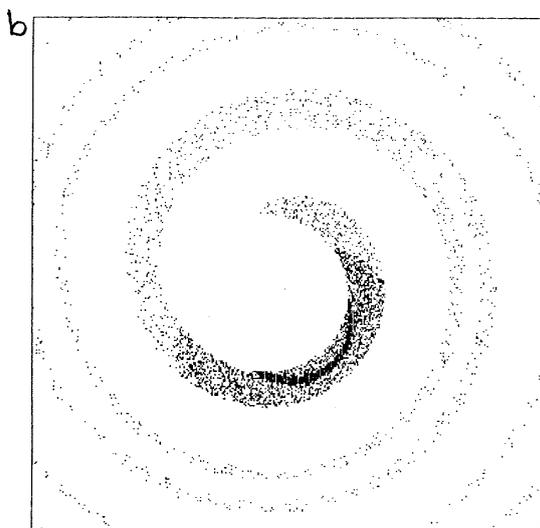
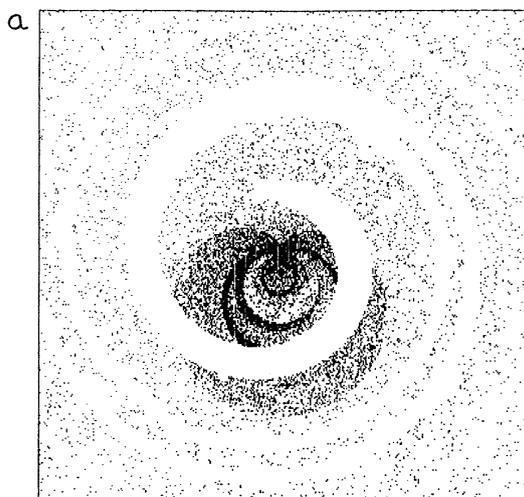


Figure 14 : Trajectoires pour des conditions initiales appartenant à deux bassins d'attractions différents.



a - Régime de décollage-atterrissage.

b - Régime de rebond.

Figure 15 : Bassins d'attraction des deux régimes périodiques.
Représentation polaire $v_i, \omega t$.

Deux remarques peuvent être faites à l'examen de la figure 15. D'une part, si l'on réunit les deux bassins, on reconstitue bien entendu le plan entier, mais dans cette reconstitution, les zones de plus grande densité ont une forme similaire à celle de l'attracteur étrange obtenu pour une valeur plus élevée du paramètre de contrôle (figure 17b). D'autre part, la séparation des deux bassins coupe ces zones selon une direction que rien ne laissait prévoir. Si le premier point peut se comprendre de façon plus ou moins intuitive, nous n'avons aucune interprétation concernant le second; le problème reste ouvert.

Un autre point à étudier sur ce système est le comportement pour une valeur plus élevée du paramètre de contrôle dans le cas d'un coefficient de restitution de 0.53. Pour $A_0 = 0.44$ mm par exemple, les deux régimes permanents sont des régimes chaotiques. Il serait intéressant de déterminer les bassins d'attraction respectifs de deux attracteurs étranges.

Ce dernier point peut être abordé expérimentalement et fournit matière à réflexion sur les facultés d'analyse du cerveau humain. Lorsque, débutant loin dans le régime chaotique, on fait décroître l'amplitude de vibration en agissant sur le bouton de niveau du générateur B.F., les deux bassins d'attraction sont si intimement liés que l'obtention de l'un ou l'autre des régimes après la séparation est pratiquement aléatoire. Cependant, avec un peu d'expérience, il est possible de distinguer à l'oreille de subtiles différences de rythme et d'obtenir à volonté le régime périodique stable.

6. CONCLUSION

Présentée au congrès de la S.F.P. à Caen au cours de l'opération "Physique dans la Ville", cette expérience a suscité de l'intérêt auprès d'un public de tous niveaux. D'un point de vue général, elle est intéressante par son aspect démonstratif. Les notions de seuil, de bifurcation, d'attracteur étrange... sont directement illustrées, par le comportement de la bille et sur l'écran de l'ordinateur.

Une approche plus quantitative ne nécessite que des outils mathématiques à la portée d'élèves de lycée : équations de la chute libre, calcul numérique de l'intersection de deux courbes. Ceci est important d'un point de vue conceptuel : le calcul ne présentant pas de difficulté, le caractère fondamental de la sensibilité aux conditions initiales, par exemple, apparaît beaucoup plus nettement.

Du point de vue de l'enseignant, la physique du chaos ne fait pas partie des programmes, ou du moins pas encore. Mais le choix de ce thème, aussi bien pour des travaux pratiques que pour un projet d'informatique, fournit aux étudiants ou aux élèves une motivation supplémentaire. Il est en effet stimulant de sentir que l'on peut aborder, avec des outils connus et maîtrisés, un domaine nouveau et encore peu étudié de la physique.

Pour le physicien qui désire approfondir la question, le grand intérêt de ce système est la rapidité de l'acquisition de données. Ceci est vrai du point de vue expérimental, une fréquence de 30 Hz donnant en moyenne un point toutes les 33 ms, mais aussi du point de vue de la simulation numérique. Il est ainsi possible, en quelques minutes de calcul sur un microordinateur, de mettre en évidence l'autosimilarité de l'attracteur étrange pour un système physique réel alors que les exemples que l'on trouve dans les ouvrages sur le chaos sont en général calculés à partir d'équations mathématiques de récurrence n'ayant pas de lien vraiment direct avec un système physique.

Enfin, il n'est pas interdit de penser que, simplement avec un micro-ordinateur sur un coin de bureau, il est possible d'explorer soi-même des aspects encore mal connus de cette physique du chaos et peut-être de contribuer à son avancement. Les questions ouvertes à propos des bassins d'attraction dans la section 5 en donnent un exemple.

Je tiens à remercier ici les groupes d'étudiants qui, au cours des trois dernières années, ont contribué à l'approfondissement de cette expérience. Je remercie aussi E. RESSAYRE pour des discussions fructueuses sur les problèmes de stabilité.

Annexe - Espaces des phases

Le mouvement d'une bille libre le long d'une direction verticale est entièrement déterminé si on connaît son altitude z et sa vitesse v à un instant donné t . L'espace des phases est à deux dimensions.

Le mouvement périodique du plateau rajoute une troisième coordonnée. En effet, l'évolution du système est conditionnée aussi par la position du plateau à l'instant t ou, inversement, si l'excitation sert de référence de temps, il faut connaître z , v et τ , le temps compté dans ce repère pour déterminer la trajectoire. On a ainsi les trois degrés de liberté minimum nécessaires à l'apparition du chaos^[1]. La figure 16

présente un essai de représentation de la trajectoire périodique de la bille dans un tel espace, en coordonnées cartésiennes τ , v , z .

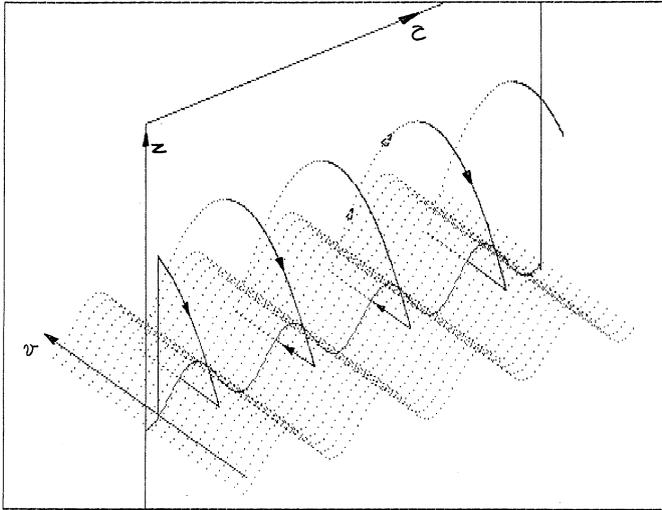


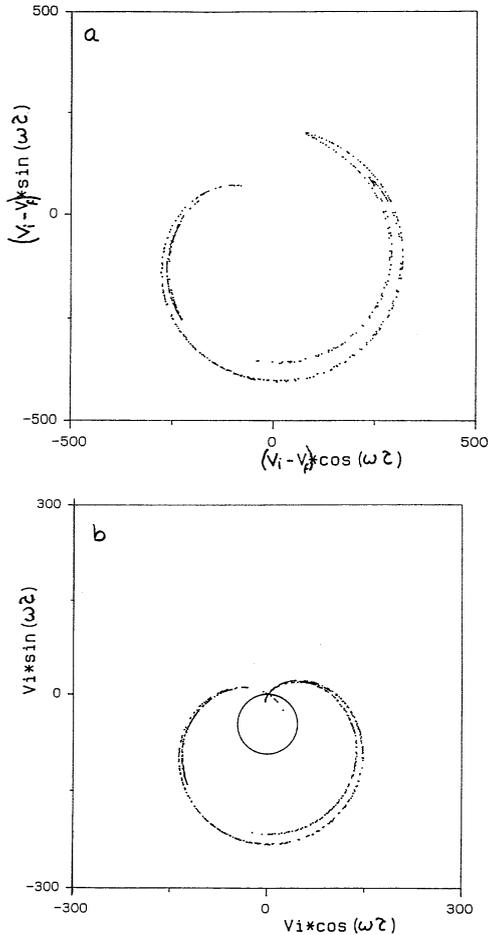
Figure 16 : Représentation en coordonnées cartésiennes de la trajectoire dans l'espace des phases.

Une telle représentation ne prend cependant pas en compte le caractère périodique de l'excitation : le temps τ n'est défini que modulo T . La représentation correcte de l'espace des phases serait donc une représentation en coordonnées cylindriques, z étant l'altitude, v le rayon vecteur et $\omega\tau$ l'angle polaire. Sur un écran d'ordinateur, on peut suivre au cours du temps la trajectoire dans une telle représentation, mais une figure imprimée devient tout de suite difficilement lisible.

On se ramène à une étude à deux dimensions en effectuant une section de l'espace des phases par une surface coupant la trajectoire. Celle-ci se réduit alors à une série de points. Les possibilités de coupes sont multiples. On peut par exemple fixer une altitude z et noter les temps τ et les vitesses v de passage à cette altitude, ou encore relever à chaque période l'altitude et la vitesse pour un instant τ fixé.

La section utilisée ici celle qui apparaît naturellement dans l'expérience puisqu'elle correspond aux chocs. Il s'agit de la projection sur le plan τ, v d'une coupe par la surface sinusoïdale $z = A_0 \cos(\omega\tau)$.

Cette coupe donne deux valeurs de v : v_i et v_f , l'une ou l'autre pouvant être retenues. L'expérience mélangeant ces deux valeurs sous la forme $v_i - v_f$ ne fournit pas à proprement parler une coupe, mais les propriétés du diagramme restent les mêmes.



a - intensité du choc $(v_i - v_f)$ en fonction de $\omega \tau$.

b - vitesse initiale v_i en fonction de $\omega \tau$.

Figure 17 : Représentations de l'attracteur de la figure 5d en coordonnées polaires.

Dans un souci pédagogique, ces coupes ont été présentées en représentation cartésienne sur les figures 5, 6, 7 et 12 mais la représentation logique est la représentation polaire, projection sur le plan $z = 0$ de l'espace des phases décrit plus haut. La figure 17 montre le même attracteur que sur la figure 5b dans cette représentation, le rayon vecteur étant $v_i - v_f$ sur la figure 17a et v_i sur la figure 17b. Sur cette dernière, la vitesse du plateau a été reportée à la même échelle, Il faut noter que, dans cette représentation, les vitesses étant algébriques, les points $(v, \omega\tau)$ et $(-v, \omega\tau + \pi)$ sont confondus. Le cercle représentant la vitesse du plateau est ainsi parcouru deux fois en une période.

RÉFÉRENCES

- [1] *L'ordre dans le chaos* P. BERGÉ, Y. POMEAU, Ch. VIDAL Éditions Hermann, (1984 et 1988).
- [2] *La physique du désordre* La Recherche, Numéro spécial 232, (Mai 1991).
- [3] *Le chaos* J. CRUTCHFIELD, D. FARMER, N. PACKARD et R. SHAW Pour la Science, (Février 1987).
- [4] a *Chaotic dynamics of a bouncing ball* N.B. Tuffilaro and A.M. Albano American Journal of Physics. vol 54, p. 939, (Octobre 1986).
 b *STRANGE ATTRACTOR of a bouncing ball* T.M. MELLO and N.B. TUFFILARO American Journal of Physics, vol 55, p 316, (Avril 1987).
 c *Comment on "Chaotic dynamics of a bouncing ball"* R.L. ZIMMERMAN American Journal of Physics, vol 56, p. 1147, (Décembre 1988).
- [5] *Simple experiments in chaotic dynamics* K. BRIGGS American Journal of Physics, vol 55, p. 1083, (Décembre 1987).
- [6] *Du silence au chaos acoustique* C. MAZANGA La Recherche, vol. 173, p. 100 (Janvier 1986).